UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ALGEBRA LINEAL 520131
Listado 6 (Espacios vectoriales con producto interior.)

1. a) Considere $\mathbb{R}^2$ con el producto interior usual. Si $x = (1, 2)$ y $y = (-1, 1)$, encuentre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\langle v, x\rangle = -2 \wedge \langle v, y\rangle = 3.$$

   b) Demuestre que para cada vector $u \in \mathbb{R}^2$, se tiene

$$u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2,$$

   donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}$.

(En práctica.)

2. Encuentre una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir de $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$.

3. Dado el vector $(2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$, construya a partir de él una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. **(En práctica.)**

4. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el $p.i.$ usual. Sea $S = \langle\{(1, 1, 1), (-1, 1, 0)\}\rangle$.

   a) Caracterice $S^\perp$ y determine su dimensión.

   b) Encontrar una base B ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que uno de sus vectores sea elemento de $S^\perp$.

5. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con el $p.i.$

$$\langle p, q\rangle = 2\int_0^2 p(x)q(x)dx$$

   Pruebe que el conjunto $\{1, x-2, x^2-2\}$ es $l.i.$ y ortonormalice respecto del $p.i.$ dado.

6. En $\mathbb{C}^2$ se define el producto interior **(En práctica.)**

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$

   Pruebe que los vectores $x = (3, -i)$, $y = (2, 6i)$ son ortogonales y normalícelos.

7. Pruebe que en el espacio $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$, con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

   el conjunto $\{1, \sqrt{3}(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\}$ es una base ortonormal.

8. En el espacio $C_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$, con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

   el conjunto $\{\sin(x), \cos(x)\}$ es ortogonal. **(En práctica.)**

9. Pruebe que $\{\sin(nx), \cos(nx), 1\}$ es un conjunto ortogonal con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

10. En el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 con el producto

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

construya a partir de la base $\{1, x, x^2\}$ una base ortonormal.

11. Sean x e y vectores de un espacio vectorial con $p.i.$ tales que $x + y$ es ortogonal a $x - y$. Demuestre que $\|x\| = \|y\|$.

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $p.i.$. Demuestre que: $\forall x, y \in V$, **(En práctica.)**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

13. Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$. Halle $W^{\perp}$. ¿Qué representan geométricamente W y $W^{\perp}$?