CAPÍTULO 1

Matrices

1.1. Preliminares de matrices

Definición 1.1.1 **(Matriz)** *Sean m, $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo ($\mathbb{R}$, ó $\mathbb{C}$). Se llama función Matricial sobre $\mathbb{K}$ a una función*

$$A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{K}, \quad (i, j) \to A(i, j).$$

Se designa por a_{ij} al valor de A en el par (i, j). Se escribe:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o bien $A = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, y se dice que A es una matriz de orden $m \times n$. También se escribe $A = (a_{ij})$, cuando está claro el número de filas y columnas de A.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), entonces la matriz se dice real (compleja) o a valores reales (complejos). El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, con elementos en $\mathbb{K}$, se denota por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llama Matriz nula a la matriz A, tal que $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y se denota por θ.

Definición 1.1.2 (**Igualdad de Matrices**) *Sean* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *dos matrices, entonces*

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

1.2. Operaciones con matrices

Definición 1.2.1 (Suma de matrices) *Sean* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *entonces la matriz suma* $A + B$ *es*

$$A + B = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i = 1, \dots, m,\ \forall j = 1, \dots, n.$$

Definición 1.2.2 (Multiplicación de matrices) *Sean* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$. *La matriz producto* $C = AB$ *es una matriz de* $M_{m\times p}(\mathbb{K})$, *con*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Propiedades 1.2.1 (Suma y producto de matrices) *Para cualquier* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *se tiene:*

- $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- $A+B = B+A$.
- $\exists \theta \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A+\theta = A$.
- $\exists (-A) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : A+(-A) = \theta$.

Y para A, B, C matrices de modo que los productos estén definidos, tenemos:

- $(AB)C = A(BC)$.
- $A(B+C) = AB+AC$.
- $\exists A \neq \theta, B \neq \theta : AB = \theta$.

Ejemplo 1.2.1 **(En general el producto de matrices no es conmutativo)** *Basta considerar*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.2.2 **(Ejemplo de producto de Matrices)** *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

Entonces, solo el producto AB es posible y en tal caso:

$$AB = \begin{pmatrix} 27 & 55 & 31 \\ 17 & 49 & 36 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.2.3 **(Producto de un escalar por una matriz)** *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$,*

$\lambda \in \mathbb{K}$, se define el producto $\lambda A = B$, por

$$\lambda A = (b_{ij}) \ \ con \ \ b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Propiedades 1.2.2 $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$.
- $\alpha(AC) = (\alpha A)C = A(\alpha C), \forall C \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$.

Definición 1.2.4 **(Transpuesta de una matriz)** *Para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se define la transpuesta de A como la matriz $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, donde*

$$A^t = (b_{ij}) \ \ con \ \ b_{ij} = a_{ji}, \ \ 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq m.$$

Propiedades 1.2.3 $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $(A^t)^t = A$.
- $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- $(\alpha A)^t = \alpha(A^t)$.
- $(CD)^t = D^t C^t,\ \forall C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), D \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$.

Definición 1.2.5 **(Matrices cuadradas)** *Una matriz cuadrada de n filas y n columnas es una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$. Se dice que una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es:*

Triangular superior *si $a_{ij} = 0$, para $i > j$.*

Triangular inferior *si $a_{ij} = 0$, para $i < j$.*

Diagonal *si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.*

Escalar *si es diagonal y* $a_{ii} = \lambda$*, para* $1 \leq i \leq n$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

Identidad *si es escalar y* $a_{ii} = 1$*, para* $1 \leq i \leq n$*.*

Simétrica *si* $A^t = A$*.*

Antisimétrica *si* $A^t = -A$*.*

Observaciones: Denotaremos la matriz Identidad de orden n como I_n y cuando no exista confusión la denotaremos por I, además

$$AI = IA = A, \ \forall A \in M_n(\mathbb{K}).$$

Toda matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica con una antisimétrica.

1.3. Matrices invertibles

Definición 1.3.1 **(Matrices Invertibles)** *Una matriz* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *se dice invertible (o no singular) si existe una matriz* $B \in M_n(\mathbb{K})$ *tal que* $AB = I \wedge BA = I$, *donde* I *denota la matriz identidad.*

La matriz B se llama inversa de A y se denota por A^{-1}.

Si A es invertible, entonces su inversa A^{-1} es única.

Si A y B son invertibles, entonces AB también lo es y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.3.1. Operaciones elementales

Definición 1.3.2 (Operaciones Elementales sobre filas) *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se llaman operaciones elementales sobre filas sobre A a las siguientes operaciones.*

Intercambio de dos filas de A, la fila i con la fila j. Se escribe

$$f_{ij},\ \ i,j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Multiplicar una fila de A por un escalar α no nulo. Para la fila i se escribe $\alpha f_i,\ \ \alpha \in \mathbb{K}$.

Sumar un múltiplo escalar de una fila a otra. Si a la fila j se suma α veces la fila i, entonces se escribe $f_j + \alpha f_i,\ \ \alpha \in \mathbb{K}$.

Teorema 1.3.1 *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y F una operación elemental sobre filas cualquiera, entonces*

$$F(A) = F(I)A.$$

Corolario 1.3.1 *Si* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$ *y* F *es una operación elemental sobre filas, entonces*

$$F(AB) = F(A)B.$$

Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *son operaciones elementales de filas, entonces*

$$(F_n \circ \cdots \circ F_2 \circ F_1)(AB) = (F_n \circ \cdots \circ F_2 \circ F_1(A))B.$$

Teorema 1.3.2 *Toda operación elemental sobre filas es invertible y su inversa es una operación elemental sobre filas del mismo tipo.*

Definición 1.3.3 (Matrices equivalentes por filas) *Dos matrices* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *y* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *se dicen equivalentes por filas si una se obtiene de la otra por aplicación de una o varias operaciones elementales sobre filas.*

Teorema 1.3.3 *Si* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *es equivalente por filas con* I, *entonces* A *es invertible.*

Observaciones: 1.- Si A es invertible y $F_1, \ldots, F_n$ son operaciones elementales sobre filas que permiten pasar de A a la matriz identidad I, entonces la matriz inversa A^{-1} se obtiene aplicando, en el mismo orden, las operaciones elementales $F_1, \ldots, F_n$ a la matriz I.
2.- Para calcular A^{-1} se efectúan las operaciones elementales sobre filas en la matriz ampliada $(A|I)$ hasta obtener la matriz $(I|B)$. En tal caso $B = A^{-1}$.

Ejemplo 1.3.1 *Encuentre la inversa de la matriz A dada por,*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encuentre valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea invertible. Considere A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Notación: Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces designamos por $A_{ij} \in M_{m-1\times n-1}(\mathbb{K})$ a la matriz obtenida de A eliminando la fila i y la columna j.

1.3.2. Determinante de una matriz

Definición 1.3.4 **(Determinante)** *Se llama Función determinante sobre* $\mathbb{K}$ *a la función*

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad A \to \det(A),$$

tal que

- *Si* $n = 1$ *y* $A = (a)$, *entonces* $\det(A) = a$.
- *Si* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, *entonces* $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$, *para cualquier* $i = 1, 2, \ldots, n$.

También se escribe $\det(A) = |A|$.

Propiedades 1.3.1 *Para $A \in M_n(\mathbb{K})$ se tiene.*

- *Si A tiene una fila nula, entonces* $\det(A) = 0$.
- *Si A es una matriz triangular, entonces* $\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- $\det(A^t) = \det(A)$.
- *Si F es una operación elemental sobre filas que intercambia dos filas de A, es decir, $B = F(A)$, entonces* $\det(B) = -\det(A)$.
- *Si F es una operación elemental sobre filas que multiplica una fila de A por un escalar α, es decir, $B = F(A)$, entonces* $\det(B) = \alpha \det(A)$.
- *Si F es una operación elemental sobre filas que suma un múltiplo escalar α de la fila i a la fila j, es decir, $B = F(A)$, entonces* $\det(B) = \det(A)$.
- *Si A tiene dos filas iguales, entonces* $\det(A) = 0$.
- *Si una fila de A es combinación lineal de otras filas de A, entonces* $\det(A) = 0$.

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Observación: Dado que $\det(A^t) = \det(A)$, se tiene que todas las propiedades indicadas también valen para las columnas.

Definición 1.3.5 *Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
Se llama Menor de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz A_{ij}, es decir es el escalar $\det(A_{ij})$.
Se llama Cofactor de un elemento a_{ij} al escalar $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.
Si c_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} , entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \det(A), \quad \textit{para cualquier} \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{kj} = 0, \quad k \neq i \quad \textit{para cualquier} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ejemplo: Calcular $|A|$, donde la matriz A viene dada por

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.3.3. Matriz de cofactores y matriz adjunta

Definición 1.3.6 **(Matriz de cofactores)** *Se llama Matriz de cofactores de la matriz A a la matriz que contiene los cofactores de cada elemento a_{ij}. Se escribe* $\mathrm{cof}(A) = A^c$.

Definición 1.3.7 (**Matriz Adjunta**) *Se llama Matriz Adjunta de la matriz* A *a la matriz transpuesta de la matriz de cofactores. Se escribe* $\operatorname{adj}(A) = (A^c)^t$.

Teorema 1.3.4 A *es inversible sí y sólo sí* $\det(A) \neq 0$.

Teorema 1.3.5 *Si* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *y* $\det(A) \neq 0$, *entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Definición 1.3.8 (**Rango de una matriz**) *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. *Se llama rango de* A *al orden de la mayor submatriz cuadrada de* A *con determinante no nulo. Se escribe* $r(A)$.

Observaciones:

1.- Si A y B son equivalentes por filas, entonces $r(A) = r(B)$.

2.- Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se dice escalonada por filas si el primer elemento no nulo de cada fila de A está a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior. El número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente por filas con A es igual a $r(A)$.

Ejemplo 1.3.2 *Muestre que existe A^{-1} y encuentrela. Siendo A,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Encuentre el rango de la matriz B dada por,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

1.4. Ejercicios

1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule AB, BA y $(AC^2 - I)$.

   b) Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales:
   i) $-2X + C = B$, ii) $(A - \frac{2}{3}X)^t = 2C$, iii) $2C + X = B^2$.

2. Considere las siguientes definiciones:
   i) M se dice antisimétrica si $M^t = -M$, ii) M se dice ortogonal si $M^{-1} = M^t$.
   Demuestre las siguientes proposiciones:

   a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

b) Toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

c) Las matrices AA^t y A^tA son simétricas.

d) Si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es una matriz ortogonal.

e) Si A es una matriz simétrica y H es una matriz ortogonal, entonces $H^{-1}AH$ es una matriz simétrica.

f) Si $A \in M_{n\times n}$ es simétrica y $B \in M_{n\times m}$, entonces B^tAB es una matriz simétrica.

3. Calcule la inversa de las siguientes matrices, donde $a \in \mathbb{R}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcule los números reales a y b, tales que: $A^2 + aA + bI = \theta$.

   b) De la ecuación anterior calcule una expresión para la inversa de A.

   c) Usando la expresión obtenida en (b) calcule la inversa de A.

   d) Compruebe el resultado obtenido.

5. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que A^tA es invertible, y sea $B = I - A(A^tA)^{-1}A^t$.

   a) Pruebe que $B^2 = B$.

   b) Muestre que $BA = \theta$.

   c) Pruebe que B es una matriz simétrica.