CAPÍTULO 7

Espacios vectoriales

7.1 Preliminares

Definición 7.1.1 **(Cuerpo)** *Sea $\mathbb{K}$ un conjunto y sean $+$ y $\cdot$ dos operaciones binarias internas definidas sobre $\mathbb{K}$, llamadas* **suma** *y* **producto** *respectivamente. Diremos que $\mathbb{K}$, con estas operaciones, es un* **cuerpo** *si se satisfacen los siguientes axiomas:*

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$ **Asociatividad de +**
2. $\forall x, y \in \mathbb{K}, \quad x + y = y + x.$ **Conmutatividad de +**
3. $\exists 0 \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, \quad x + 0 = x.$ **Elemento neutro para +**
4. $\forall x \in \mathbb{K}, \exists -x \in \mathbb{K}, \quad x + (-x) = 0.$ **Simétrico**
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$ **Asociatividad de ·**
6. $\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$ **Elemento neutro para ·**
7. $\forall x \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$ **Inverso de x**
8. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \wedge \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$
   Distributividad de · respecto de la suma +
9. *Diremos que $\mathbb{K}$ es un* **cuerpo conmutativo***, si además se satisface:*

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Observaciones:

1. Escribiremos la terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ para indicar que el conjunto $\mathbb{K}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ es un cuerpo.
2. Los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ de los números racionales, reales y complejos respectivamente, constituyen cuerpos conmutativos con las operaciones de suma y producto usuales.

Definición 7.1.2 **(Espacio vectorial)** *Sean V un conjunto, $\mathbb{K}$ un cuerpo y*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (x, y) &\to x + y, \end{aligned}$$

una operación binaria interna llamada **suma**,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\alpha, x) &\to \alpha x, \end{aligned}$$

una operación binaria externa llamada **producto por escalar**.

Diremos que V con las operaciones $+$ y $\cdot$ es un **espacio vectorial** *sobre $\mathbb{K}$ o un* **$\mathbb{K}$-espacio vectorial**, *si:*

1. $\forall x, y, z \in V, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$
2. $\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x.$
3. $\exists \theta_v \in V$ *(vector nulo) para* $+$, *tal que,* $\quad x + \theta_v = x, \forall x \in V.$
4. $\forall x \in V, \exists -x \in V, \quad x + (-x) = \theta_v.$
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$
8. $\forall x \in V, \; 1 \cdot x = x,$ *donde 1 es el elemento unidad de* $\mathbb{K}$.

Observaciones:

1. Los elementos de V se denominan **vectores** y los elementos de $\mathbb{K}$, **escalares**.
2. Del axioma 3 se concluye que $V \neq \phi$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, diremos que V es un espacio vectorial real. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, diremos que V es un espacio vectorial complejo.
4. Cualesquiera sean los vectores x e y de V, $x + (-y)$ se escribe como $x - y$ y se llama **diferencia** entre x e y.

7.2 Propiedades de los espacios vectoriales

Teorema 7.2.1 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces*

1. *El elemento neutro θ_v para la operación suma, es único.*

2. *Para cada* $x \in V$ *existe un único simétrico (inverso aditivo)* $-x \in V$.
3. *Ley de cancelación*
$$\forall x, y, z \in V,\ \ x + y = x + z \Rightarrow y = z$$
4. *Para todo* $x \in V$, $0 \cdot x = \theta_v$.
5. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot \theta_v = \theta_v$.
6. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$, *para todo* $x \in V$, $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$.
7. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$, *para todo* $x \in V$, $\alpha \cdot x = \theta_v \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee x = \theta_v)$.

Ejemplo 7.2.1 1. *Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo, entonces* $\mathbb{K}$ *es un espacio vectorial sobre si mismo, lo cual se sigue trivialmente de las propiedades de cuerpo.*

2. *Consideremos el conjunto* $\mathbb{R}^n$ *de todas las* n*-uplas de números reales, es decir:*
$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n.\},$$
$\mathbb{R}^n$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial con las siguientes operaciones*
$$\begin{aligned} + :\ & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \cdot :\ & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

3. *Si en* $\mathbb{R}^2$ *se definen la suma como en el ejemplo anterior y el producto por escalar como sigue:*
$$\begin{aligned} \cdot :\ & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ & \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2), \end{aligned}$$
Luego $\mathbb{R}^2$ *con estas operaciones no es un espacio vectorial.*

4. *El símbolo* $\mathbb{K}^X$ *denota el conjunto de todas las funciones con dominio un conjunto* $X \neq \phi$ *y codominio en el cuerpo* $\mathbb{K}$*, es decir*
$$\mathbb{K}^X = \{f | f : X \to \mathbb{K}\}$$
En $\mathbb{K}^X$ *definimos la suma de funciones y el producto de un escalar por una función como sigue. Si* f *y* g *son dos elementos cualesquiera de* $\mathbb{K}^X$*, entonces:*
$$\begin{aligned} f + g :& X \to \mathbb{K} \\ & (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Si α es cualquier escalar en $\mathbb{K}$ y f cualquier elemento de $\mathbb{K}$, entonces:

$$\begin{aligned}\alpha f :& X \to \mathbb{K}\\ &(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in X.\end{aligned}$$

$(\mathbb{K}^X, +, \cdot)$ *un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

5. *El conjunto $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ de las matrices de orden $n \times m$ con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$ y con las operaciones de suma y producto por un escalar usuales, es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Los vectores de este espacio son matrices.*

7.3 Subespacio vectorial

Definición 7.3.1 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y S un subconjunto de V. Diremos que S es un* **subespacio vectorial** *de V, si S es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las mismas operaciones de suma y producto por escalar definidas en V.*

Observación: Cualquiera sea el espacio vectorial V, tanto $\{\theta_v\}$ como V son subespacios de V llamados subespacios triviales.

Teorema 7.3.1 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que $S \subset V$ es* **subespacio** *vectorial de V si y sólo si*

1. $S \neq \emptyset$
2. *si para cualquier $x, y \in S$, se cumple que $x + y \in S$ y*
3. *si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in S$, entonces $\lambda x \in S$.*

Ejemplo 7.3.1

1. *Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = -d \right\}$. S es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$. S no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.*
3. *El conjunto $V = C_{[0,1]}(\mathbb{R})$ de las funciones reales continuas sobre $[0, 1]$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^{[0,1]}$ de las funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.*
4. *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces Ax denotará la multiplicación de A por la matriz columna formada por $x_1, \ldots, x_n$, es decir*

$$Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sea

$$S = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}.$$

Es decir, S es el subconjunto de $\mathbb{K}^n$ de las soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces, S es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$.

7.3.1 Intersección de subespacios

Teorema 7.3.2 *Si S y T son dos subespacios vectoriales de un mismo $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, entonces la intersección de S y T, $S \cap T$, es un subespacio vectorial de V.*

Demostración: Hacer en clase.

1. $S \cap T \neq \phi$.
2. $S \cap T$ es cerrado para la suma.
3. $S \cap T$ es cerrado para multiplicación por escalar.

7.3.2 Unión de subespacios

En general la unión de subespacios no es un subespacio vectorial. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3.2 *1. Sean $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ y $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2}\}$ subespacios vectoriales. Luego $u = (1, 2) \in S$, por lo tanto $u \in S \cup T$. Análogamente, $v = (2, 1) \in T$, por lo tanto $v \in S \cup T$. Pero, $u + v = (3, 3) \notin S$ y $(3, 3) \notin T$. Luego, $u + v \notin S \cup T$. Por lo tanto $S \cup T$ no es un subespacio vectorial.*

Teorema 7.3.3 *Si S y T son subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, entonces $S \cup T$ es subespacio si y sólo si $S \subseteq T \vee T \subseteq S$.*

7.3.3 Suma de espacios vectoriales

Sean S y T dos subespacios del mismo $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, se llama **suma** de S y T al conjunto

$$S + T = \{v \in V : v = s + t, s \in S \wedge t \in T\}.$$

Teorema 7.3.4 *$S + T$ es un subespacio vectorial de V.*

Demostración: Hacer en clase.

Observación: Si $S \cap T = \{\theta_v\}$, la suma $S + T$ se llama **suma directa** y se escribe $S \oplus T$.

Ejemplo 7.3.3 *1. Sea*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\} = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

S es el subespacio representado por el eje X, y

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

El subespacio T es el plano coordenado YZ. Muestre que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

2. En $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, consideremos los subespacios

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = c = 0 \right\},$$

y

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = d = 0 \right\}.$$

Calcule $S + T$ y muestre que $S + T$ no es suma directa.

3. Sean $S = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$. Muestre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus T$.

7.3.4 Combinaciones lineales. Dependencia e independencia lineal

Definición 7.3.2 **(Combinación lineal)** *Sean, V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $x_1, \ldots, x_n$ vectores de V. El vector x es* **combinación lineal** *(C.L.) de $x_1, \ldots, x_n$ si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que*

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Observación: El vector nulo es *C.L.* de cualquier conjunto de vectores.

Ejemplo 7.3.4 *1. Decidir si $p(t) = t^2 - 2t + 3$ es C.L. de $p_1(t) = (t-1)^2$, $p_2(t) = \frac{1}{2}t + 1$, $p_3(t) = 5$.*

2. Investigar si $A = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$ es C.L de las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ Respuesta: Sí (de infinitas maneras).

Teorema 7.3.5 *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subseteq V$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de A es un subespacio vectorial de V.*

$$S = \{x \in V : x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, r\}.$$

El subespacio S se llama **subespacio generado** *por A o* **subespacio generado** *por los vectores $v_1, \ldots, v_r$. Los vectores $v_1, \ldots, v_r$ se llaman* **generadores** *de S.*

Se denota por $S = \langle A \rangle = \langle \{v_1, \ldots, v_r\} \rangle$. También se dice que $v_1, \ldots, v_r$ **generan al subespacio** *o que A es un* **sistema** *de generadores de S.*

Demostración: Hacer en clase.

Ejemplo 7.3.5 1. *Caracterice el subespacio generado por $v_1 = (0, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 3, -1)$ y $v_3 = (2, -11/2, 3)$.*

Solución: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2y - 7x = 0\}$.

2. *Consideremos el subespacio de las matrices simétricas*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Encuentre el conjunto A tal que $S = \langle A \rangle$.

Respuesta: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Definición 7.3.3 *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $A = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$; A es un conjunto* **linealmente dependiente** *($L.D.$) si existen escalares no todos nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \theta_v,$$

Si A no es un conjunto $L.D.$ se dice que es **linealmente independiente** *($L.I.$).*

Definición 7.3.4 *S es un conjunto* **linealmente independiente** *si todo subconjunto finito de S es $L.I.$*

Observaciones:

1. Todo conjunto que consta de un único vector distinto del nulo es $L.I.$

2. Todo conjunto que contiene al vector nulo es $L.D.$

Ejemplo 7.3.6 1. *Muestre que $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, es un conjunto $L.I.$*

2. *Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, donde θ_v es el polinomio nulo. Sea $A = \{3x^2 - 2x, x^2 + 1, -3x + 2, x^2 - 1\} \subseteq \mathcal{P}_2(x)$. Muestre que A es $L.D.$*

Observaciones:

1. Si $v_1, \ldots, v_k$ es un conjunto de vectores $L.D.$, entonces uno de los vectores es $C.L.$ de los restantes.

2. Recíprocamente, si un vector v es $C.L.$ de $v_1, \ldots, v_k$, entonces $\{v, v_1, \ldots, v_k\}$ es $L.D.$

3. Si el conjunto $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un sistema de generadores $L.D.$ del espacio vectorial V, entonces existe $v_j \in A$ tal que $A - \{v_j\}$ es un sistema de generadores de V.

Definición 7.3.5 ($L.I.$ **maximal**) *Un subconjunto $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es $L.I.$* **maximal**, *si A es $L.I.$ y si $A \cup \{w\}$ es $L.D.$, cualquiera sea $w \in V$, $w \neq v_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Ejemplo 7.3.7 *$A = \{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto $L.I.$ maximal puesto que es $L.I.$ y cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de A. Luego $A \cup \{w\}$ es L.D., para todo $w \in \mathbb{R}^2$.*

Definición 7.3.6 (**Base de V**) *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es una* **base** *de V si:*

1. *A es $L.I.$*

2. *A es un sistema de generadores de V.*

Teorema 7.3.6 *Todo espacio vectorial posee base.*

Demostración: La demostración del Teorema 7.3.6 no está al alcance de este curso.

Ejemplo 7.3.8
1. *Si $V = \mathbb{R}^3$, se puede demostrar fácilmente que el conjunto $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es $L.I.$ y un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, A constituye una base de $\mathbb{R}^3$, llamada* **base canonica** *de $\mathbb{R}^3$.*

2. *El conjunto $B = \{3, x-1, x^2+x\}$ es base del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(x)$ (polinomios de grado menor o igual a 2, con coeficientes reales).*

Teorema 7.3.7 *Sea V un K-espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $v_1, \ldots, v_n$. Entonces todo conjunto $L.I.$ de vectores de V es finito y contiene a lo más n vectores.*

Definición 7.3.7 (**Dimension de V**) *Se llama* **dimensión** *de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V al número de elementos de una base cualquiera de V. Se denota $\dim(V)$. Si V consiste únicamente en él vector nulo, diremos que su dimensión es 0.*

7.3.5 Listado 5

1. Sean U, V, W, Z los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.
   $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$,

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$,
$W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$,
$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y = 2z\}$.
Caracterice los elementos de cada uno de los siguientes espacios:

a) $U + V$
b) $U + W$
c) $V + W$
d) $W + Z$
e) $U \cap W$
f) $V \cap W$
g) $U \cap Z$

2. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes.

   a) $\{(3, 6, 1), (2, 1, 1), (-1, 0, -1)\}$ en $\mathbb{R}^3$
   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   c) $\{t^3 - t^2 + 4t + 1, \quad 2t^3 - 2t^2 + 9t - 1, \quad t^3 + 6t - 5, \quad 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5\}$ en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

3. Demuestre que los polinomios $\{(1 - t)^3, (1 - t)^2, (1 - t), 1\}$, generan el espacio de los polinomios de grado menor o igual que tres.

4. Sean $S_1 = \{\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x), \operatorname{sen}(x)\cos(x)\}$ y $S_2 = \{1, \operatorname{sen}(2x), \cos(2x)\}$. Muestre que los vectores de cada conjunto son $L.I.$

5. Encuentre una base y determine la dimensión de los siguientes subespacios:

   a) $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\}$,
   b) $Y = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y\}$,
   c) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6x = 3y = z\}$,
   d) $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - 2c + d = 0\}$,
   e) $V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\}$
   f) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & d & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$,
   g) $T = \langle\{7 - x^2, x^2 + 1, x^2 - 1\}\rangle$,
   h) $S = \langle\{\cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2x)\}\rangle$,
   i) $R = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$,
   j) $Q = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$,
   k) $P = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p'(0) = 0\}$.

6. Considere el conjunto $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con la suma usual de polinomios y la multiplicación por escalar definida por
$$\alpha p(x) = \alpha p'(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$
¿Es $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ un espacio vectorial con estas operaciones?.

7. Considere la ecuación $x - 2y + 3z = 0$.

   a) Muestre que el conjunto solución S de esta ecuación es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
   b) Encuentre una base para S y su dimensión.

8. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S_1 = \{u, v, w\}$ un subconjunto $L.I$ de V. Demuestre que: $S_2 = \{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ es también $L.I$.

9. Considere los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.
   $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$
   $V = \langle\{-1, 2, 1), (0, 0, 1)\}\rangle$
   Caracterice los subespacios $U + V$ y $U \cap V$.

10. Encuentre la dimensión del subespacio $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = d \right\}$.

11. Encuentre la dimensión del espacio $U = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : 2b - c = 0\}$.

12. Dados los subespacios $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + c = 0 \right\}$ y

    $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : 2b - d = 0 \right\}$.

    a) Caracterice el subespacio $U \cap V$.
    b) ¿Es $U + V$ suma directa?.

13. Considere el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + 3y - z = 0\}$ y el subespacio T de $\mathbb{R}^3$ generado por $(3, -1, 1)$.

    a) Demuestre que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
    b) Determine una base para $S + T$ y decida si ésta es una suma directa.

CAPÍTULO 8

Espacios vectoriales con producto interior

8.1 Espacios vectoriales con producto interior

Definición 8.1.1 **(Productor interior)** *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice un* **producto interior** *sobre V si verifica:*

1. $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V, \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = \theta.$

2. $\forall v_1, v_2$ *y* $w \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,
$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w\rangle = \alpha\langle v_1, w\rangle + \beta\langle v_2, w\rangle.$$

3. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle} \quad \forall v, w \in V.$

Propiedades 8.1.1

1. *De (3) se tiene que*
$$\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle} \quad \forall v \in V,$$
de donde se puede concluir que $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$.

2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y* V *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *entonces (3) se transforma en*
$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall v, w \in V.$$

3. $\forall w_1, w_2$ *y* $v \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
$$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \overline{\alpha}_1\langle v, w_1\rangle + \overline{\alpha}_2\langle v, w_2\rangle.$$
En particular, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *se tiene*
$$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \alpha_1\langle v, w_1\rangle + \alpha_2\langle v, w_2\rangle.$$

Ejemplo 8.1.1 (**Producto interior**) *1.- Sea $V = \mathbb{C}^n$ espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ \langle u, v\rangle &= \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i, \end{aligned}$$

es un producto interior.

2. Sea $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_{n\times m} \times \mathcal{M}_{n\times m} &\to \mathbb{R} \\ \langle A, B\rangle &= tr(A^t B), \end{aligned}$$

es un producto interior. Donde la **traza** *de una matriz cuadrada A es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $tr(A)$.*

3. Sea $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle : C_{\mathbb{R}}[a,b] \times C_{\mathbb{R}}[a,b] &\to \mathbb{R} \\ \langle f, g\rangle &= \int_a^b f(x)g(x)dx, \end{aligned}$$

es un producto interior.

Definición 8.1.2 (**Norma**) *Sea V un espacio vectorial con producto interior, se llama norma del vector v al número $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Propiedades 8.1.2 $\forall u, v, w \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$,

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$.
2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
3. $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$. **(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. **(Desigualdad triangular)**

Definición 8.1.3 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior*

1. *$v, w \in V$, v es* **ortogonal** *a w si $\langle v, w\rangle = 0$.*
2. *un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un* **conjunto ortogonal** *si $\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.*
3. *un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto* **ortonormal** *si es un conjunto ortogonal y $\|v_i\| = 1 \quad \forall i = \{1, \ldots, n\}$.*

Lema 8.1.1 *Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es L.I.*

Demostración: Demostrar en clases.

Corolario 8.1.1 *Si un vector w es C.L. de un conjunto ortogonal de vectores no nulos $\{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces w es igual a*

$$w = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle w, x_k \rangle}{\|x_k\|^2} x_k.$$

Demostración: Demostrar en clases.

Proposition 8.1.1 (**Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt**) *Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle\,,\,\rangle$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces existe una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que el subespacio generado por los vectores $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es el mismo que el subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_m\}$ $(1 \leq m \leq n)$. Explícitamente, la base es*

$$w_1 = v_1, \tag{1}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1, \tag{2}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2, \tag{3}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}. \tag{n}$$

Ejemplo 8.1.2 *1. Sea $B = \{(3,0,4), (-1,0,7), (2,9,11)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Encuentre una base ortogonal para $\mathbb{R}$.*

Respuesta: $B' = \{(3,0,4), (-4,0,3), (0,9,0)\}$

Observación: Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle\,,\,\rangle$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, por Gram-Schmidt existe una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de V. Sea $u_i = w_i/\|w_i\|$, entonces $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base de V donde los vectores son ortogonales y de norma 1.

Definición 8.1.4 *Sea V espacio vectorial con producto interior $\langle\,,\,\rangle$ y sean U, W subespacios de V. Diremos que U es* **ortogonal** *a W y denotaremos $U \perp W$ si para todo $u \in U$ y para todo $w \in W$ tenemos que $\langle u, w \rangle = 0$.*

Si X es subconjunto de V, definimos

$$X^{\perp} := \{u \in V : \langle u, x \rangle = 0, \forall x \in X\}. \qquad (\textbf{Complemento ortogonal de X})$$

Proposition 8.1.2 *Sea V espacio vectorial con producto interior $\langle\,,\,\rangle$ y $X \subseteq V$. Entonces $X^{\perp}$ es un subespacio de V.*

Demostración: Demostrar en clases.

Observación: Si W es subespacio y x es ortogonal a todo vector de una base de W entonces $x \in W^{\perp}$.

Ejemplo 8.1.3 *1.* $W = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. *Encuentre* $W^{\perp}$.

2. Sean $S = \{(x,y,z) : 2x - 3y + z = 0\}$ *y* $T = \{(x,y,z) : \frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = z\}$. *Muestre que* $S \perp T$.

8.1.1 Listado 6

1. a) Considere $\mathbb{R}^2$ con el producto interior usual. Si $x = (1,2)$ y $y = (-1,1)$, encuentre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que
$$\langle v, x\rangle = -2 \ \wedge \ \langle v, y\rangle = 3.$$
   b) Demuestre que para cada vector $u \in \mathbb{R}^2$, se tiene
$$u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2,$$
   donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}$.

2. Encuentre una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir de $\{(1,1,0), (-1,1,0), (-1,1,1)\}$.

3. Dado el vector $(2,1,-1) \in \mathbb{R}^3$, construya a partir de él una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el $p.i.$ usual. Sea $S = \langle\{(1,1,1), (-1,1,0)\}\rangle$.
   a) Caracterice $S^{\perp}$ y determine su dimensión.
   b) Encontrar una base B ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que uno de sus vectores sea elemento de $S^{\perp}$.

5. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con el $p.i.$
$$\langle p, q\rangle = 2\int_0^2 p(x)q(x)dx$$
   Pruebe que el conjunto $\{1, x-2, x^2-2\}$ es $l.i.$ y ortonormalice respecto del $p.i.$ dado.

6. En $\mathbb{C}^2$ se define el producto interior
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$
   Pruebe que los vectores $x = (3, -i)$, $y = (2, 6i)$ son ortogonales y normalícelos.

7. Pruebe que en el espacio $C_{\mathbb{R}}[0,1]$, con el producto interior
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$
   el conjunto $\{1, \sqrt{3}(2t-1), \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\}$ es una base ortonormal.

8. En el espacio $C_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$, con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

el conjunto $\{\sin(x), \cos(x)\}$ es ortogonal.

9. Pruebe que $\{\sin(nx), \cos(nx), 1\}$ es un conjunto ortogonal con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

10. En el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 con el producto

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

construya a partir de la base $\{1, x, x^2\}$ una base ortonormal.

11. Sean x e y vectores de un espacio vectorial con $p.i.$ tales que $x+y$ es ortogonal a $x-y$. Demuestre que $\|x\| = \|y\|$.

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $p.i.$. Demuestre que: $\forall x, y \in V$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

13. Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$. Halle $W^{\perp}$. ¿Qué representan geométricamente W y $W^{\perp}$?