

CAPÍTULO 7

Espacios vectoriales

7.1. Preliminares

Definición 7.1.1 (Cuerpo) Sea \mathbb{K} un conjunto y sean $+$ y \cdot dos operaciones binarias internas definidas sobre \mathbb{K} , llamadas **suma** y **producto** respectivamente. Diremos que \mathbb{K} , con estas operaciones, es un **cuerpo** si se satisfacen los siguientes axiomas:

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$

Asociatividad de $+$

2. $\forall x, y \in \mathbb{K}, \quad x + y = y + x.$

Conmutatividad de $+$

3. $\exists 0 \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, \quad x + 0 = x.$

Elemento neutro para $+$

4. $\forall x \in \mathbb{K}, \exists -x \in \mathbb{K}, \quad x + (-x) = 0.$

Simétrico

5. $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

Asociatividad de \cdot

6. $\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{K}, \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$

Elemento neutro para \cdot

7. $\forall x \in \mathbb{K}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$

Inverso de x

$$8. \forall x, y, z \in \mathbb{K}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \wedge \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Distributividad de \cdot respecto de la suma $+$

9. Diremos que \mathbb{K} es un **cuerpo conmutativo**, si además se satisface:

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Observaciones:

1. Escribiremos la terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ para indicar que el conjunto \mathbb{K} con las operaciones $+$ y \cdot es un cuerpo.
2. Los conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} de los números racionales, reales y complejos respectivamente, constituyen cuerpos conmutativos con las operaciones de suma y producto usuales.

Definición 7.1.2 (Espacio vectorial) Sean V un conjunto, \mathbb{K} un cuerpo y

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (x, y) &\rightarrow x + y, \end{aligned}$$

una operación binaria interna llamada **suma**,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (\alpha, x) &\rightarrow \alpha x, \end{aligned}$$

una operación binaria externa llamada **producto por escalar**.

Diremos que V con las operaciones $+$ y \cdot es un **espacio vectorial** sobre \mathbb{K} o un **\mathbb{K} -espacio vectorial**, si:

1. $\forall x, y, z \in V, \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$

2. $\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x.$

3. $\exists \theta_v \in V$ (vector nulo) para $+$, tal que, $x + \theta_v = x, \forall x \in V$.

4. $\forall x \in V, \exists -x \in V, x + (-x) = \theta_v$.

5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V, \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

6. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. $\forall x \in V, 1 \cdot x = x$, donde 1 es el elemento unidad de \mathbb{K} .

Observaciones:

1. Los elementos de V se denominan **vectores** y los elementos de \mathbb{K} , **escalares**.

2. Del axioma 3 se concluye que $V \neq \phi$.

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, diremos que V es un espacio vectorial real. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, diremos que V es un espacio vectorial complejo.
4. Cualesquiera sean los vectores x e y de V , $x + (-y)$ se escribe como $x - y$ y se llama **diferencia** entre x e y .

7.2. Propiedades de los espacios vectoriales

Teorema 7.2.1 *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} . Entonces*

1. *El elemento neutro θ_v para la operación suma, es único.*
2. *Para cada $x \in V$ existe un único simétrico (inverso aditivo) $-x \in V$.*
3. *Ley de cancelación*

$$\forall x, y, z \in V, \quad x + y = x + z \Rightarrow y = z$$

4. *Para todo $x \in V$, $0 \cdot x = \theta_v$.*
5. *Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \cdot \theta_v = \theta_v$.*
6. *Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, para todo $x \in V$, $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)$.*
7. *Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, para todo $x \in V$, $\alpha \cdot x = \theta_v \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee x = \theta_v)$.*

Ejemplo 7.2.1 1. Sea \mathbb{K} un cuerpo, entonces \mathbb{K} es un espacio vectorial sobre si mismo, lo cual se sigue trivialmente de las propiedades de cuerpo.

2. Consideremos el conjunto \mathbb{R}^n de todas las n -uplas de números reales, es decir:

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.\},$$

\mathbb{R}^n es un \mathbb{R} -espacio vectorial con las siguientes operaciones

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

3. Si en \mathbb{R}^2 se definen la suma como en el ejemplo anterior y el producto por escalar como

sigue:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2),$$

Luego \mathbb{R}^2 con estas operaciones no es un espacio vectorial.

4. *El símbolo \mathbb{K}^X denota el conjunto de todas las funciones con dominio un conjunto $X \neq \emptyset$ y codominio en el cuerpo \mathbb{K} , es decir*

$$\mathbb{K}^X = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$$

En \mathbb{K}^X definimos la suma de funciones y el producto de un escalar por una función como sigue.

Si f y g son dos elementos cualesquiera de \mathbb{K}^X , entonces:

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in X.$$

Si α es cualquier escalar en \mathbb{K} y f cualquier elemento de \mathbb{K}^X , entonces:

$$\alpha f : X \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in X.$$

$(\mathbb{K}^X, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espacio vectorial.

5. El conjunto $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ de las matrices de orden $n \times m$ con elementos en el cuerpo \mathbb{K} y con las operaciones de suma y producto por un escalar usuales, es un \mathbb{K} -espacio vectorial. Los vectores de este espacio son matrices.

7.3. Subespacio vectorial

Definición 7.3.1 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y S un subconjunto de V . Diremos que S es un **subespacio vectorial** de V , si S es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} con las mismas operaciones de suma y producto por escalar definidas en V .

Observación: Cualquiera sea el espacio vectorial V , tanto $\{0_v\}$ como V son subespacios de V llamados subespacios triviales.

Teorema 7.3.1 Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Diremos que $S \subset V$ es **subespacio vectorial** de V si y sólo si

1. $S \neq \emptyset$
2. si para cualquier $x, y \in S$, se cumple que $x + y \in S$ y

3. si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in S$, entonces $\lambda x \in S$.

Ejemplo 7.3.1 1. Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = -d \right\}$. S es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$. S no es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

3. El conjunto $V = C_{[0,1]}(\mathbb{R})$ de las funciones reales continuas sobre $[0, 1]$ es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^{[0,1]}$ de las funciones de $[0, 1]$ en \mathbb{R} .

4. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces Ax denotará la multiplicación de A por la matriz columna formada por x_1, \dots, x_n , es decir

$$Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sea

$$S = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}.$$

Es decir, S es el subconjunto de \mathbb{K}^n de las soluciones del sistema $Ax = 0$. Entonces, S es un subespacio vectorial de \mathbb{K}^n .

7.3.1. Intersección de subespacios

Teorema 7.3.2 Si S y T son dos subespacios vectoriales de un mismo \mathbb{K} -espacio vectorial V , entonces la intersección de S y T , $S \cap T$, es un subespacio vectorial de V .

Demostración: Hacer en clase.

1. $S \cap T \neq \emptyset$.
2. $S \cap T$ es cerrado para la suma.

3. $S \cap T$ es cerrado para multiplicación por escalar.

7.3.2. Unión de subespacios

En general la unión de subespacios no es un subespacio vectorial. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3.2 1. Sean $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ y $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2}\}$ subespacios vectoriales. Luego $u = (1, 2) \in S$, por lo tanto $u \in S \cup T$. Análogamente, $v = (2, 1) \in T$, por lo tanto $v \in S \cup T$. Pero, $u + v = (3, 3) \notin S$ y $(3, 3) \notin T$. Luego, $u + v \notin S \cup T$. Por lo tanto $S \cup T$ no es un subespacio vectorial.

Teorema 7.3.3 Si S y T son subespacios de un \mathbb{K} -espacio vectorial V , entonces $S \cup T$ es subespacio si y sólo si $S \subseteq T \vee T \subseteq S$.

7.3.3. Suma de espacios vectoriales

Sean S y T dos subespacios del mismo \mathbb{K} -espacio vectorial V , se llama **suma** de S y T al conjunto

$$S + T = \{v \in V : v = s + t, s \in S \wedge t \in T\}.$$

Teorema 7.3.4 $S + T$ es un subespacio vectorial de V .

Demostración: Hacer en clase.

Observación: Si $S \cap T = \{\theta_v\}$, la suma $S + T$ se llama **suma directa** y se escribe $S \oplus T$.

Ejemplo 7.3.3 1. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\} = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

S es el subespacio representado por el eje X , y

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

El subespacio T es el plano coordenado YZ . Muestre que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

2. En $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, consideremos los subespacios

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = c = 0 \right\},$$

y

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : b = d = 0 \right\}.$$

Calcule $S + T$ y muestre que $S + T$ no es suma directa.

3. Sean $S = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = A^t\}$ y $T = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A = -A^t\}$. Muestre que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus T$.

7.3.4. Combinaciones lineales. Dependencia e independencia lineal

Definición 7.3.2 (Combinación lineal) Sean, V un \mathbb{K} -espacio vectorial, x_1, \dots, x_n vectores de V . El vector x es **combinación lineal** (C.L.) de x_1, \dots, x_n si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Observación: El vector nulo es C.L. de cualquier conjunto de vectores.

Ejemplo 7.3.4 1. Decidir si $p(t) = t^2 - 2t + 3$ es C.L. de $p_1(t) = (t - 1)^2$, $p_2(t) = \frac{1}{2}t + 1$, $p_3(t) = 5$.

2. Investigar si $A = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$ es C.L. de las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ Respuesta: Sí (de infinitas maneras).}$$

Teorema 7.3.5 Sean V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subseteq V$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de A es un subespacio vectorial de V .

$$S = \{x \in V : x = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i, \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, r\}.$$

El subespacio S se llama **subespacio generado** por A o **subespacio generado** por los vectores v_1, \dots, v_r . Los vectores v_1, \dots, v_r se llaman **generadores** de S .

Se denota por $S = \langle A \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_r\} \rangle$. También se dice que v_1, \dots, v_r **generan al subespacio** o que A es un **sistema** de generadores de S .

Demostración: Hacer en clase.

Ejemplo 7.3.5 1. Caracterice el subespacio generado por $v_1 = (0, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 3, -1)$ y $v_3 = (2, -11/2, 3)$.

Solución: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2y - 7x = 0\}$.

2. Consideremos el subespacio de las matrices simétricas

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Encuentre el conjunto A tal que $S = \langle A \rangle$.

Respuesta: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Definición 7.3.3 Sean V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $A = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$; A es un conjunto **linealmente dependiente** (L.D.) si existen escalares no todos nulos $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = \theta_v,$$

Si A no es un conjunto L.D. se dice que es **linealmente independiente** (L.I.).

Definición 7.3.4 S es un conjunto **linealmente independiente** si todo subconjunto finito de S es L.I.

Observaciones:

1. Todo conjunto que consta de un único vector distinto del nulo es L.I.
2. Todo conjunto que contiene al vector nulo es L.D.

Ejemplo 7.3.6 1. Muestre que $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, es un conjunto L.I.

2. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, donde θ_v es el polinomio nulo. Sea $A = \{3x^2 - 2x, x^2 + 1, -3x + 2, x^2 - 1\} \subseteq \mathcal{P}_2(x)$. Muestre que A es L.D.

Observaciones:

1. Si v_1, \dots, v_k es un conjunto de vectores *L.D.*, entonces uno de los vectores es *C.L.* de los restantes.
2. Recíprocamente, si un vector v es *C.L.* de v_1, \dots, v_k , entonces $\{v, v_1, \dots, v_k\}$ es *L.D.*
3. Si el conjunto $A = \{v_1, \dots, v_k\}$ es un sistema de generadores *L.D.* del espacio vectorial V , entonces existe $v_j \in A$ tal que $A - \{v_j\}$ es un sistema de generadores de V .

Definición 7.3.5 (*L.I. maximal*) *Un subconjunto $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ del \mathbb{K} -espacio vectorial V es L.I. maximal, si A es L.I. y si $A \cup \{w\}$ es L.D., cualquiera sea $w \in V$, $w \neq v_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Ejemplo 7.3.7 $A = \{(1, 0), (0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto L.I. maximal puesto que es L.I. y cualquier vector de \mathbb{R}^2 se puede escribir como combinación lineal de los vectores de A . Luego $A \cup \{w\}$ es L.D., para todo $w \in \mathbb{R}^2$.

Definición 7.3.6 (Base de V) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. $A = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ es una **base** de V si:

1. A es L.I.
2. A es un sistema de generadores de V .

Teorema 7.3.6 Todo espacio vectorial posee base.

Demostración: La demostración del Teorema 7.3.6 no está al alcance de este curso.

Ejemplo 7.3.8 1. Si $V = \mathbb{R}^3$, se puede demostrar fácilmente que el conjunto $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es L.I. y un sistema de generadores de \mathbb{R}^3 . Por lo tanto, A constituye una base de \mathbb{R}^3 , llamada **base canonica** de \mathbb{R}^3 .

2. El conjunto $B = \{3, x-1, x^2+x\}$ es base del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(x)$ (polinomios de grado

menor o igual a 2, con coeficientes reales).

Teorema 7.3.7 Sea V un K -espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores v_1, \dots, v_n . Entonces todo conjunto L.I. de vectores de V es finito y contiene a lo más n vectores.

Definición 7.3.7 (Dimension de V) Se llama **dimensión** de un \mathbb{K} -espacio vectorial V al número de elementos de una base cualquiera de V . Se denota $\dim(V)$. Si V consiste únicamente en el vector nulo, diremos que su dimensión es 0.

7.3.5. Listado 5

1. Sean U, V, W, Z los siguientes subespacios de \mathbb{R}^3 .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\},$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\},$$

$$W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\},$$

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y = 2z\}.$$

Caracterice los elementos de cada uno de los siguientes espacios:

a) $U + V$

e) $U \cap W$

b) $U + W$

f) $V \cap W$

c) $V + W$

d) $W + Z$

g) $U \cap Z$

2. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes.

a) $\{(3, 6, 1), (2, 1, 1), (-1, 0, -1)\}$ en \mathbb{R}^3

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

c) $\{t^3 - t^2 + 4t + 1, 2t^3 - 2t^2 + 9t - 1, t^3 + 6t - 5, 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5\}$ en $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

3. Demuestre que los polinomios $\{(1-t)^3, (1-t)^2, (1-t), 1\}$, generan el espacio de los polinomios de grado menor o igual que tres.
4. Sean $S_1 = \{\sin^2(x), \cos^2(x), \sin(x)\cos(x)\}$ y $S_2 = \{1, \sin(2x), \cos(2x)\}$. Muestre que los vectores de cada conjunto son *L.I.*
5. Encuentre una base y determine la dimensión de los siguientes subespacios:

a) $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\}$,

b) $Y = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y\}$,

c) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6x = 3y = z\}$,

d) $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - 2c + d = 0\}$,

e) $V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\}$

f) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & d & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$,

g) $T = \langle \{7 - x^2, x^2 + 1, x^2 - 1\} \rangle$,

h) $S = \langle \{\cos^2(x), \sin^2(x), \cos(2x)\} \rangle$,

i) $R = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$,

j) $Q = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$,

k) $P = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p'(0) = 0\}$.

6. Considere el conjunto $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con la suma usual de polinomios y la multiplicación por escalar definida por

$$\alpha p(x) = \alpha p'(x), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

¿Es $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ un espacio vectorial con estas operaciones?

7. Considere la ecuación $x - 2y + 3z = 0$.

a) Muestre que el conjunto solución S de esta ecuación es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

b) Encuentre una base para S y su dimensión.

8. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial y $S_1 = \{u, v, w\}$ un subconjunto *L.I* de V . Demuestre que: $S_2 = \{u + v, u - v, u - 2v + w\}$ es también *L.I*.

9. Considere los siguientes subespacios de \mathbb{R}^3 .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$$

$$V = \langle \{-1, 2, 1\}, (0, 0, 1)\rangle$$

Caracterice los subespacios $U + V$ y $U \cap V$.

10. Encuentre la dimensión del subespacio $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b \wedge c = d \right\}$.

11. Encuentre la dimensión del espacio $U = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : 2b - c = 0\}$.

12. Dados los subespacios $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a + c = 0 \right\}$ y

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : 2b - d = 0 \right\}.$$

a) Caracterice el subespacio $U \cap V$.

b) ¿Es $U + V$ suma directa?

13. Considere el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x + 3y - z = 0\}$ y el subespacio T de \mathbb{R}^3 generado por $(3, -1, 1)$.

a) Demuestre que S es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

b) Determine una base para $S + T$ y decida si ésta es una suma directa.

CAPÍTULO 8

Espacios vectoriales con producto interior

8.1. Espacios vectoriales con producto interior

Definición 8.1.1 (Productor interior) Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ se dice un **producto interior** sobre V si verifica:

1. $\langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V, \quad \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \theta.$

2. $\forall v_1, v_2$ y $w \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},$

$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \beta \langle v_2, w \rangle.$$

3. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in V.$

Propiedades 8.1.1 1. De (3) se tiene que

$$\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in V,$$

de donde se puede concluir que $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}.$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y V espacio vectorial sobre \mathbb{R} entonces (3) se transforma en

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

3. $\forall w_1, w_2$ y $v \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

$$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle v, w_1 \rangle + \bar{\alpha}_2 \langle v, w_2 \rangle.$$

En particular, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se tiene

$$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle = \alpha_1 \langle v, w_1 \rangle + \alpha_2 \langle v, w_2 \rangle.$$

Ejemplo 8.1.1 (Producto interior) 1.- Sea $V = \mathbb{C}^n$ espacio vectorial sobre \mathbb{C} .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i,$$

es un producto interior.

2. Sea $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_{n \times m} \times \mathcal{M}_{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B),$$

es un producto interior. Donde la **traza** de una matriz cuadrada A es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $\text{tr}(A)$.

3. Sea $C_{\mathbb{R}}[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_{\mathbb{R}}[a, b] \times C_{\mathbb{R}}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

es un producto interior.

Definición 8.1.2 (Norma) Sea V un espacio vectorial con producto interior, se llama norma del vector v al número $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Propiedades 8.1.2 $\forall u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$.

2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

3. $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$.

(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(Desigualdad triangular)

Definición 8.1.3 Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial con producto interior

1. $v, w \in V$, v es **ortogonal** a w si $\langle v, w \rangle = 0$.

2. un subconjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ es un **conjunto ortogonal** si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.

3. un subconjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto **ortonormal** si es un conjunto ortogonal y $\|v_i\| = 1 \quad \forall i = \{1, \dots, n\}$.

Lema 8.1.1 Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es L.I.

Demostración: Demostrar en clases.

Corolario 8.1.1 Si un vector w es C.L. de un conjunto ortogonal de vectores no nulos $\{x_1, \dots, x_n\}$, entonces w es igual a

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{\langle w, x_k \rangle}{\|x_k\|^2} x_k.$$

Demostración: Demostrar en clases.

Proposition 8.1.1 (Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea V espacio vec-

torial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Entonces existe una base ortogonal $\{w_1, \dots, w_n\}$ tal que el subespacio generado por los vectores $\{w_1, \dots, w_m\}$ es el mismo que el subespacio generado por $\{v_1, \dots, v_m\}$ ($1 \leq m \leq n$). Explícitamente, la base es

$$w_1 = v_1, \tag{1}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1, \tag{2}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2, \tag{3}$$

\vdots

$$w_n = v_n - \frac{\langle v_n, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \dots - \frac{\langle v_n, w_{n-1} \rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}. \tag{n}$$

Ejemplo 8.1.2 1. Sea $B = \{(3, 0, 4), (-1, 0, 7), (2, 9, 11)\}$ una base de \mathbb{R}^3 . Encuentre una

base ortogonal para \mathbb{R} .

Respuesta: $B' = \{(3, 0, 4), (-4, 0, 3), (0, 9, 0)\}$

Observación: Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Entonces, por Gram-Schmidt existe una base ortogonal $\{w_1, \dots, w_n\}$ de V . Sea $u_i = w_i / \|w_i\|$, entonces $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de V donde los vectores son ortogonales y de norma 1.

Definición 8.1.4 Sea V espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sean U, W subespacios de V . Diremos que U es **ortogonal** a W y denotaremos $U \perp W$ si para todo $u \in U$ y para todo $w \in W$ tenemos que $\langle u, w \rangle = 0$.

Si X es subconjunto de V , definimos

$$X^\perp := \{u \in V : \langle u, x \rangle = 0, \forall x \in X\}. \quad (\text{Complemento ortogonal de } X)$$

Proposition 8.1.2 Sea V espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $X \subseteq V$. Entonces X^\perp es un subespacio de V .

Demostración: Demostrar en clases.

Observación: Si W es subespacio y x es ortogonal a todo vector de una base de W entonces $x \in W^\perp$.

Ejemplo 8.1.3 1. $W = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Encuentre W^\perp .

2. Sean $S = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : \frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = z\}$. Muestre que $S \perp T$.

8.1.1. Listado 6

1. a) Considere \mathbb{R}^2 con el producto interior usual. Si $x = (1, 2)$ y $y = (-1, 1)$, encuentre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\langle v, x \rangle = -2 \wedge \langle v, y \rangle = 3.$$

- b) Demuestre que para cada vector $u \in \mathbb{R}^2$, se tiene

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2,$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de \mathbb{R} .

2. Encuentre una base ortonormal para \mathbb{R}^3 a partir de $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$.
3. Dado el vector $(2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$, construya a partir de él una base ortonormal de \mathbb{R}^3 .
4. Considere el espacio vectorial \mathbb{R}^3 con el *p.i.* usual. Sea $S = \langle \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0)\} \rangle$.
- a) Caracterice S^\perp y determine su dimensión.

b) Encontrar una base B ortonormal de \mathbb{R}^3 tal que uno de sus vectores sea elemento de S^\perp .

5. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con el *p.i.*

$$\langle p, q \rangle = 2 \int_0^2 p(x)q(x)dx$$

Pruebe que el conjunto $\{1, x - 2, x^2 - 2\}$ es *l.i.* y ortonormalice respecto del *p.i.* dado.

6. En \mathbb{C}^2 se define el producto interior

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Pruebe que los vectores $x = (3, -i)$, $y = (2, 6i)$ son ortogonales y normalícelos.

7. Pruebe que en el espacio $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$, con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

el conjunto $\{1, \sqrt{3}(2t - 1), \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\}$ es una base ortonormal.

8. En el espacio $C_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$, con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

el conjunto $\{\sin(x), \cos(x)\}$ es ortogonal.

9. Pruebe que $\{\sin(nx), \cos(nx), 1\}$ es un conjunto ortogonal con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

10. En el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 con el producto

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

construya a partir de la base $\{1, x, x^2\}$ una base ortonormal.

11. Sean x e y vectores de un espacio vectorial con *p.i.* tales que $x + y$ es ortogonal a $x - y$. Demuestre que $\|x\| = \|y\|$.

12. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial con *p.i.*. Demuestre que: $\forall x, y \in V$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

13. Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$. Halle W^\perp . ¿Qué representan geoméricamente W y W^\perp ?