CAPÍTULO 2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.1. Preliminares

Definición 2.1.1 **(Sistema lineal de ecuaciones)** *Sea* $\mathbb{K}$ *el cuerpo* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$. *Un sistema lineal de* m *ecuaciones y* n *incógnitas en* $\mathbb{K}$ *es un conjunto de* m *ecuaciones lineales en que cada una tiene a lo más* n *incógnitas, esto es,*

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \tag{2.1.1}$$

donde, para $i \in \{1, \ldots, m\}$ *y* $j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ *son los coeficientes del sistema,* $b_i \in \mathbb{K}$ *son los términos independientes del sistema y* $x_1, \ldots, x_n$ *son las incógnitas del sistema.*
Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, *entonces el sistema se dice homogéneo, en caso contrario se dice no homogéneo.*

El sistema (2.1.1) se puede escribir de la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

lo que da por resultado la ecuación matricial,

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Definición 2.1.2 *Decimos que la n-upla $(y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{K}^n (= M_{n\times 1}(\mathbb{K}))$ es una solución del sistema (2.1.1), si al reemplazar ordenadamente cada x_i por y_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$, se satisfacen simultáneamente las m igualdades del sistema (2.1.1). Llamaremos conjunto solución del sistema (2.1.1), al conjunto formado por todas las soluciones del sistema.*

Definición 2.1.3 *El sistema (2.1.1) se dice:*

i) **Incompatible**, *si no tiene solución.*

ii) **Compatible determinado**, *si tiene única solución.*

iii) **Compatible indeterminado**, *si tiene más de una solución.*

Definición 2.1.4 **(Matriz ampliada del sistema)** *Dado el sistema* (2.1.1), $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, *llamaremos matriz ampliada del sistema a la matriz* $(A|\boldsymbol{b})$ *de orden* $m \times (n+1)$

Teorema 2.1.1 **(Existencia de soluciones)** *El sistema* (2.1.1) *es compatible si y sólo si* $r(A) = r(A|\boldsymbol{b})$.

Teorema 2.1.2 **(Unicidad de soluciones)** *Supongamos que el sistema* (2.1.1) *de* m *ecuaciones y* n *incógnitas es compatible y que* $r(A) = n$. *Entonces la solución del sistema es única.*

Teorema 2.1.3 **(Multiplicidad de soluciones)** *Si el sistema* (2.1.1) *es compatible y* $r =: r(A) < n$, *entonces a lo más* r *incógnitas se expresan en términos de las* $n - r$ *restantes.*

Observaciones:

i) Consideremos el sistema (2.1.1), $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Si F representa a cualquiera de las tres operaciones elementales por filas, entonces $F(A)\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{b})$.

ii) Si $(A|\boldsymbol{b})$ es equivalente por filas a la matriz $(A_1|\boldsymbol{b}_1)$, entonces el sistema $A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$, es compatible si y sólo si el sistema (2.1.1) es compatible. En este caso, el conjunto solución de ambos sistemas es el mismo.

iii) El método en donde se obtiene $(C|\boldsymbol{c})$ (equivalente por filas con $(A|\boldsymbol{b})$) escalonada por filas se denomina eliminación Gaussiana.

iv) Un caso particular de lo anterior es la sucesión de operaciones elementales que transforman la matriz A en la matriz identidad. Aplicando las mismas operaciones a la matriz ampliada se obtiene el **Método de eliminación de Gauss-Jordan**.

v) Notar que el sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \theta$ siempre tiene solución. Además el sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \theta$ tiene solución no nula si y sólo si $r(A) < n$ (n es el número de incógnitas del sistema).

Ejercicio 2.1 *Muestre que el siguiente sistema de ecuaciones tiene única solución. Encuentrela,*

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 3 \\ -x1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ 5x_1 - 6x_3 & = & -1 \end{array}\right\}$$

Definición 2.1.5 (**Sistemas de Cramer**) *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con $|A| \neq 0$, entonces la matriz A es invertible y el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, de n ecuaciones y n incógnitas, tiene solución única*

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Recordando que $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \dfrac{1}{|A|}(c_{ij})^t_{1\leq i,j\leq n}$, obtenemos la regla de Cramer.

Definición 2.1.6 **(Regla de Cramer)** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con $|A| \neq 0$, entonces la única solución del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \quad \textit{con} \quad x_i = \frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n} c_{ki}b_k, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Observación: Notar que para $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

donde A_i es la matriz de orden n, obtenida de la matriz A en que la columna i-ésima de A es reemplazada por los elementos de B.

Ejercicio 2.2 *Resuelva usando la regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales,*

$$\begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 3x + y - z &= 2 \\ 4x - 2y + z &= 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.3 (Interpolación polinomial) *Determine el polinomio cuadrático que interpola los puntos en el plano* $(1, 3)$, $(2, 4)$ *y* $(3, 7)$.

Ejercicio 2.4 *Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales,*

$$\begin{cases} x + \lambda y + z &= 1 \\ -2x - y + z &= 3 \\ -x + y + \lambda z &= \lambda \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. *Detrermine todos los valores de* $\lambda \in \mathbb{R}$ *para los cuales el sistema tiene:*

a) Única solución.

b) *Infinitas soluciones.*

c) *no tiene solución.*

Ejercicio 2.5 (Problema de valores y vectores propios de una matriz) *Considere la matriz A dada por,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

a) *Encuentre los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ tenga solución no trivial (valores propios de A).*

b) *Resuelva el sistema $(A + 4I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (Espacio propio asociado al valor propio -4).*

2.2. Factorización LU

Si la matriz A es tal que la etapa de eliminación del M.E.G. se puede llevar a cabo (es decir si todos los pivotes $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n-1$), entonces

$$A = LU,$$

donde:

- U es la **matriz triangular superior que resulta del proceso de eliminación** y
- L es la **matriz triangular inferior de los multiplicadores** m_{ij}:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Veremos a continuación como resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el proceso de factorización LU.

- Si $A = LU$, entonces

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff L(U\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \iff \begin{cases} L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \end{cases}$$

  Por lo tanto, resolver un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es equivalente a:

  1. Resolver $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ y, luego,
  2. resolver $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

- Factorizar la matriz $A = LU$ consiste simplemente en: **triangularizar A por eliminación gaussiana** y **almacenar la matriz triangular L de multiplicadores**.

Ejemplo 2.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{m_{21}=-2 \\ m_{31}=4}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{m_{32}=3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$U := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$Notemos\ que$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Resuelva...

Ejercicio 2.6 *Use factorización LU de A para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{\begin{array}{rcc} 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 & = & 2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 & = & -4 \\ -12x_1 + 8x_2 + 21x_3 - 8x_4 & = & 8 \\ -6x_1 - 10x_3 + 7x_4 & = & -43 \end{array}\right.$$

Obs: El algoritmo de eliminación gaussiana (o el de factorización LU) sólo puede llevarse a cabo **si todos los pivotes son no nulos:**

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0.$$

Note que el sistema de ecuaciones lineales siguiente tiene matriz no singular pues su determinante es 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo el algoritmo (M.E.G) no puede aplicarse pues $a_{11} = 0$ y, por lo tanto, $m_{21} = a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ y $m_{31} = a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ no están definidos.

Para resolver el sistema, debe **intercambiarse la primera ecuación con cualquiera de las otras de manera de evitar el pivote cero**. Por ejemplo, asi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, puede demostrarse que la **estabilidad** del método de eliminación gaussiana en cuanto a **propagación de errores de redondeo** se deteriora si los multiplicadores m_{ij} son números muy grandes en módulo.

Una forma de evitar ambos inconvenientes, pivotes nulos y multiplicadores grandes en módulo, es realizar en cada paso el intercambio de ecuaciones que produzca el pivote mayor posible en módulo. Esto estrategia se denomina **pivoteo parcial**.

Estrategia de pivoteo parcial:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

- En el paso k-ésimo se revisa el vector

$$\begin{pmatrix} a_{kk}^{(k)} \\ \vdots \\ a_{nk}^{(k)} \end{pmatrix}$$

y se busca la fila l en la que aparece la entrada mayor en módulo:

$$k \leq l \leq n : \ \left| a_{lk}^{(k)} \right| = \max_{k \leq i \leq n} \left\{ \left| a_{ik}^{(k)} \right| \right\}.$$

- Luego, si $l \neq k$, se intercambia esa fila con la k-ésima.
- Si la matriz es no singular, siempre habrá una entrada no nula en ese vector, por lo que así se evitan los pivotes nulos.
- Además, despues del intercambio, $\left| a_{kk}^{(k)} \right| \geq \left| a_{ik}^{(k)} \right|$, $i = k, \ldots, n$. Por lo tanto, los multiplicadores no pueden pasar de 1 en módulo:

$$|m_{ik}| = \left| a_{ik}^{(k)} \right| / \left| a_{kk}^{(k)} \right| \leq 1, \qquad i = k, \ldots, n.$$

- Si hay intercambios de filas, las matrices triangulares L y U que se obtienen por el **método de eliminación gaussiana con estrategia de pivoteo parcial**, ya no factorizan a $\boldsymbol{A}$, sino que factorizan a la matriz que se obtiene después de aplicar a A todos los intercambios de filas que tuvieron lugar.

Definición 2.2.1 *Se llama* **matriz de permutación** *a toda matriz que se obtenga intercambiado filas de* $\boldsymbol{I}$.

Por ejemplo, las siguientes son todas las matrices de permutación 3×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que los intercambios de filas de una matriz se obtienen **multiplicando a izquierda** por una matriz de permutación. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2.1 *Si A es una matriz no singular, entonces existen matrices no singulares L triangular inferior y U triangular superior y una matriz de permutación P, tales que*

$$LU = PA.$$

Estas matrices pueden obtenerse mediante el **método de eliminación gaussiana con estrategia de pivoteo parcial**.

- Si se debe resolver un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, se procede así:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \iff L(U\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{b} \iff \begin{cases} L\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{b}, \\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \end{cases}$$

- El método de eliminación gaussiana con estrategia de pivoteo parcial resulta **estable respecto a la propagación de errores de redondeo**.

2.3. Sistemas rectangulares: Solución en el sentido de mínimos cuadrados

Considere un sistema rectangular de ecuaciones

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $n < m$, es una matriz rectangular de m filas y n columnas y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Este problema, en general, no tiene solución: **sistema sobredeterminado**.

Una alternativa es buscar una solución en el siguiente sentido generalizado:

Hallar $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2$ sea **mínima**.

Definición 2.3.1 *El vector* $\boldsymbol{x}$ *que minimiza* $\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2$ *es la* **solución en el sentido de mínimos cuadrados** *del sistema rectangular.*

En general:

$$A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{b}.$$

2.3.1. Aplicación

Dado un conjunto de puntos

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m),$$

nos proponemos encontrar el polinomio

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1},$$

con $n < m$ que esté **más cerca** de estos puntos en el sentido que

$$\sum_{i=1}^{m} |p(x_i) - y_i|^2,$$

sea mínima.

Esta suma de cuadrados es el cuadrado de la norma del residuo del sistema rectangular:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.3.1 *Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}(m \geq n)$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Un vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ minimiza la norma del residuo $\|\boldsymbol{r}\|_2 = \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|_2$ si y sólo si el residuo $\boldsymbol{r}$ es ortogonal a la imagen de A; esto es si*

$$A^t\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0},$$

donde A^t es la matriz transpuesta de A.

En consecuencia, $\boldsymbol{x}$ debe satisfacer

$$A^t \boldsymbol{r} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A^t(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A^t A\boldsymbol{x} = A^t \boldsymbol{b}.$$

Estas últimas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones normales**.

Obs:

1. En el caso en que $m = n$ y que la matriz A sea una matriz no singular, entonces las ecuaciones normales entregan como solución la solución del sistema lineal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

2. Las ecuaciones normales tienen solución única si y sólo si todas las columnas de A son l.i.; es decir, si $rango(A) = n$.

3. En este caso, además, la matriz $A^t A$ es **simétrica y definida positiva**, de donde, las ecuaciones normales tienen solución única.

Para resolver las ecuaciones normales se puede proceder del siguiente modo:

1. Calcular la matriz A^tA y el vector $A^t\boldsymbol{b}$.

2. Obtener la matriz L de la factorización de Cholesky: $A^tA = LL^t$.

3. Resolver el sistema triangular inferior $L\boldsymbol{y} = A^t\boldsymbol{b}$.

4. Resolver el sistema triangular superior $L^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

Ejemplo 2.3.1 *Ajustar los siguientes datos a un polinomio de grado 2 en el sentido de mínimos cuadrados.*

x	$f(x)$
-3	14
-1	4
1	2
3	8
5	22
7	44

2.4. Ejercicios

1. En cada caso calcule $\det(A)$ y $\det(A^{-1})$. ¿Existe A^{-1}?. En caso que exista, encuentrela.

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, b)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, c)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Para las siguientes matrices A y B, pruebe que $\det(A) = \det(B)$ sin calcular los valores de los determinantes.

a) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} -a & -g & -d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 20 \\ 1 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & 17 \end{pmatrix}$

4. Calcule, si es que existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales las matrices siguientes tienen inversa

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, b) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -k \\ 2 & 6 & -2k \\ 1 & 3 & 1+k \end{pmatrix}, c) \quad C = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

5. Calcule el rango de las siguientes matrices

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Para cada matriz dada determine su inversa si existe, usando operaciones elementales y matriz adjunta.

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Decida si los sistemas que siguen son incompatibles o compatibles. En el último caso, decida si son determinados o indeterminados y encuentre la solución.

$$a) \left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 8 \\ 3x & - & y & = & 4 \end{array}\right\}, \qquad b) \left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ x & + & 3y & = & 8 \\ 2x & + & 2y & = & 10 \end{array}\right\},$$

$$c) \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

8. Muestre que el siguiente sistema es compatible determinado y encuentre su solución por los método de Cramer y usando operaciones elementales (escalonando):

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & & & & & = & -10 \\ x_1 & - & 3x2 & & & + & x_4 & = & -4 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -15 \end{array}\right\} .$$

¿Qué método le tomó más tiempo?

9. Determine el o los valores de p y q tales que el sistema: i) No tenga solución. ii) Tenga una única solución. iii) Tenga infinitas soluciones.

$$a)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & & & + & pz & = & q \end{array}\right\}, \qquad b)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & q \\ 2x & - & y & + & z & = & p \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right\} .$$

10. Determine los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente posea solución no trivial:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & \alpha x & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

11. Determine los valores que debe tomar el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & c \end{array}\right\}$$

En el caso en que el sistema no sea determinado, determine las condiciones que debe satisfacer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para que el sistema sea compatible indeterminado.