

## CAPÍTULO 6

---

### Valores y vectores propios

---

Todas las matrices que consideraremos en este capítulo serán cuadradas. Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ . Una cuestión de considerable importancia en una gran variedad de problemas de aplicación, es la determinación de vectores  $\mathbf{x}$ , si los hay, tales que  $\mathbf{x}$  y  $A\mathbf{x}$  sean paralelos. Tal dificultad aparece en todas las aplicaciones relacionadas con las vibraciones: en aerodinámica, elasticidad, física nuclear, mecánica, ingeniería química, biología, ecuaciones diferenciales, etcétera. En esta sección formularemos el problema con precisión, y definiremos parte de la terminología pertinente; en la siguiente resolveremos el problema para matrices simétricas, y analizaremos brevemente la situación en el caso general.

**Definición 6.0.1** *Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ . El número real  $\lambda$  es un valor propio (también conocidos como, valores característicos, autovalores o incluso eigenvalores) de  $A$  si existe un vector  $\mathbf{x}$  distinto de cero en  $\mathbb{R}^n$  tal que*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{6.0.1}$$

*Todo vector  $\mathbf{x}$  distinto de cero que satisfaga (6.0.1) es un vector propio de  $A$ , asociado con el valor propio  $\lambda$ . Los valores propios también se llaman valores característicos, autovalores o eigenvalores (del alemán *eigen*, que significa “propio”). De manera similar, los vectores propios también se llaman vectores característicos, autovectores o eigenvectores.*

Observe que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  siempre satisface (6.0.1), pero  $\mathbf{0}$  no es un vector propio, pues, como hemos insistido, un vector propio debe ser un vector no nulo.

**Observación:** En la definición anterior, el número  $\lambda$  puede ser real o complejo, y el vector  $\mathbf{x}$  puede tener componentes reales o complejos.

**Ejemplo 6.0.1** *Si  $A$  es la matriz identidad  $I_n$ , el único valor propio es  $\lambda = 1$ ; todo vector distinto de cero en  $\mathbb{R}^n$  es un vector propio de  $A$ , asociado con el valor propio  $\lambda = 1$ :*

$$I_n\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$$

**Ejemplo 6.0.2** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ . Además,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$  asociado al valor propio  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ .

**Ejemplo 6.0.3** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  es un vector propio de  $A$ , asociado con el valor propio  $\lambda_1 = 0$ . Además,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$ , asociado con el valor propio  $\lambda_2 = 1$  (verifique).

El ejemplo resalta el hecho de que, aunque por definición el vector cero no puede ser un vector propio, el número cero sí puede ser un valor propio.

**Definición 6.0.2** Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz de  $n \times n$ . El determinante

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4)$$

es el polinomio característico de  $A$ . La ecuación

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

es la ecuación característica de  $A$ .

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de  $A$  es (verifique)

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6. \end{aligned}$$

En el desarrollo de un determinante de una matriz de  $n \times n$ , cada término es un producto de  $n$  elementos de la matriz, el cual tiene exactamente un elemento de cada fila (renglón) y un elemento de cada columna. En consecuencia, si desarrollamos  $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ , obtenemos un polinomio de grado  $n$ . Un polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales tiene  $n$  raíces (contando las repeticiones), algunas de las cuales pueden ser números complejos.

Entonces, podemos escribir

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n.$$

Si hacemos  $\lambda = 0$  en  $\det(\lambda I_n - A)$ , al igual que en la expresión de la derecha, obtenemos  $\det(-A) = c_n$ , lo cual muestra que el término constante  $c_n$  es  $(-1)^n \det(A)$ . Con este resultado se establece el siguiente teorema.

En el siguiente teorema relacionaremos el polinomio característico de una matriz con sus valores propios.

**Teorema 6.0.1** *Los valores propios de  $A$  son las raíces del polinomio característico de  $A$ .*

**Demostración:** *Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$ , asociado con el vector propio  $\mathbf{x}$ . Entonces,  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , lo cual se puede escribir como*

$$A\mathbf{x} = (\lambda I_n)\mathbf{x}$$

o

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6.0.2}$$

*un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones en  $n$  incógnitas. Este sistema tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes se anula, es decir, si y sólo si  $\det(\lambda I_n - A) = 0$ .*

*Recíprocamente, si  $\lambda$  es una raíz real del polinomio característico de  $A$ , entonces  $\det(\lambda I_n - A) = 0$ , de modo que el sistema homogéneo (6.0.2) tiene una solución no trivial  $\mathbf{x}$ . Por lo tanto,  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ .*

En consecuencia, para determinar los valores propios de una matriz dada  $A$ , debemos determinar las raíces de su polinomio característico  $f(\lambda)$ . Hay muchos métodos para determinar aproximaciones a las raíces de un polinomio, algunos más eficaces que otros; de hecho, muchos programas de computadora permiten determinar las raíces de un polinomio. Dos resultados que suelen ser útiles a este respecto son:

1. El producto de todas las raíces del polinomio

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

es  $(-1)^n a_n$ .

2. Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son enteros,  $f(\lambda)$  no puede tener una raíz racional que no sea un entero. Así, uno sólo debe verificar los factores enteros de  $a_n$  como posibles raíces racionales de  $f(\lambda)$ . Por supuesto,  $f(\lambda)$  podría tener raíces irracionales o complejas.

Los **vectores propios** correspondientes se obtienen al sustituir el valor de  $\lambda$  en la ecuación (6.0.2) y resolver el sistema homogéneo resultante.

**Ejemplo 6.0.4** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Verifique que el polinomio característico viene dado por

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

Luego, las posibles raíces enteras de  $f(\lambda)$  son  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  y  $\pm 6$ . Al sustituir estos valores en  $f(\lambda)$ , tenemos que  $f(1) = 0$ , de modo que  $\lambda = 1$  es una raíz de  $f(\lambda)$ . Por lo tanto,  $(\lambda - 1)$  es un factor de  $f(\lambda)$ . Al dividir  $f(\lambda)$  entre  $(\lambda - 1)$ , obtenemos (verifique)

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Al factorizar  $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ , tenemos

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Entonces, los valores propios de  $A$  son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Para determinar un vector propio  $\mathbf{x}_1$ , asociado con  $\lambda_1 = 1$ , formamos el sistema lineal

$$(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real  $r$ . Por lo tanto, para  $r = 2$ ,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$ , asociado con  $\lambda_1 = 1$ .

Para determinar un vector propio  $\mathbf{x}_2$  asociado con  $\lambda_2 = 2$ , formamos el sistema lineal

$$(2I_3 - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real  $r$ . En consecuencia, para  $r = 4$ ,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$ , asociado con  $\lambda_2 = 2$ .

Para determinar un vector propio  $\mathbf{x}_3$  asociado con  $\lambda_3 = 3$ , formamos el sistema lineal

$$(3I_3 - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

y vemos que una solución es (verifique)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real  $r$ . Así, para  $r = 4$ ,

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$ , asociado con  $\lambda_3 = 3$ .

**Ejemplo 6.0.5** Calcule los valores propios y los vectores propios asociados de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol: El polinomio característico de  $A$  es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & 0 & -3 \\ -1 & \lambda - 0 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

(verifique). Determinamos que  $\lambda = 3$  es una raíz de  $p(\lambda)$ . Al dividir  $p(\lambda)$  entre  $(\lambda - 3)$ , obtenemos  $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$ . Entonces, los valores propios de  $A$  son

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$$

Para obtener un vector propio  $\mathbf{x}_1$  asociado con  $\lambda_1 = 3$ , sustituimos  $\lambda = 3$  en (6.0.2), lo cual nos da como resultado

$$\begin{pmatrix} 3-0 & 0 & -3 \\ -1 & 3-0 & 1 \\ 0 & -1 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos que el vector  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$  es una solución para cualquier número real  $r$  (verifique). Al hacer

$r = 1$ , concluimos que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$ , asociado con  $\lambda_1 = 3$ . Para obtener un vector propio  $\mathbf{x}_2$  asociado con  $\lambda_2 = i$ , sustituimos  $\lambda = i$  en (6.0.2), lo que da como resultado

$$\begin{pmatrix} i-0 & 0 & -3 \\ -1 & i-0 & 1 \\ 0 & -1 & i-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos que el vector  $\begin{pmatrix} (-3i)r \\ (-3+i)r \\ r \end{pmatrix}$  es una solución para cualquier número  $r$  (verifique). Al hacer  $r = 1$ , concluimos que

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -3i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$  asociado con  $\lambda_2 = i$ . De manera similar, determinamos que

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de  $A$ , asociado con  $\lambda_3 = -i$ .

En resumen: El procedimiento para determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz, es como sigue.

Paso 1. Determinar las raíces del polinomio característico  $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ . Éstas son los valores propios de  $A$ .

Paso 2. Para cada valor propio  $\lambda$ , determine todas las soluciones no triviales para el sistema homogéneo  $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Éstos son los vectores propios de  $A$ , asociados con el valor propio  $\lambda$ .

Por supuesto, el polinomio característico de una matriz dada puede tener algunas raíces complejas, e incluso podría carecer por completo de raíces reales. Sin embargo, en el importante caso de las matrices simétricas, todas las raíces del polinomio característico son reales.

El conjunto  $S$  que consiste en todos los vectores propios de  $A$  asociados con  $\lambda_j$ , junto con el vector nulo, es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ , denominado espacio propio asociado con  $\lambda_j$  (también se le conoce como espacio invariante).

Precaución: Al determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz  $A$ , evite cometer el error común de transformar primero  $A$  a la forma escalonada reducida por filas  $B$ , y luego determinar los valores y vectores propios de  $B$ .

## 6.1 Diagonalización

**Definición 6.1.1** Se dice que una matriz  $B$  es semejante o similar a una matriz  $A$ , si existe una matriz no singular  $P$  tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

**Ejemplo 6.1.1** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

y

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,  $B$  es semejante a  $A$ .

Se deja al lector la demostración de la validez de las siguientes propiedades elementales de la semejanza.

1.  $A$  es semejante a  $A$ .
2. Si  $B$  es semejante a  $A$ , entonces  $A$  es semejante a  $B$ .
3. Si  $A$  es semejante a  $B$  y  $B$  es semejante a  $C$ , entonces  $A$  es semejante a  $C$ .

De acuerdo con la propiedad 2, podemos reemplazar las proposiciones “ $A$  es semejante a  $B$ ” y “ $B$  es semejante a  $A$ ” por “ $A$  y  $B$  son semejantes”.

**Definición 6.1.2** Diremos que la matriz  $A$  es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. En este caso, también decimos que  $A$  puede diagonalizarse.

Si  $A$  y  $B$  son como en el ejemplo anterior, entonces  $A$  es diagonalizable, ya que es semejante a  $B$ .

**Teorema 6.1.1** Matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

**Demostración:** Sean  $A$  y  $B$  semejantes. Entonces,  $B = P^{-1}AP$  para alguna matriz no singular  $P$ . A continuación demostraremos que  $A$  y  $B$  tienen los mismos polinomios característicos,  $f_A(\lambda)$  y  $f_B(\lambda)$ , respectivamente. Tenemos

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}\lambda I_n P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_n - A)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(\lambda I_n - A) \det(P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(P) \det(\lambda I_n - A) \\ &= \det(\lambda I_n - A) = f_A(\lambda) \end{aligned}$$

Como  $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$ , resulta que  $A$  y  $B$  tienen los mismos valores propios.

Note que los valores propios de una matriz diagonal son las entradas de su diagonal principal.

**Definición 6.1.3** Sean  $V = \mathbb{K}^n$  y  $A = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ ;  $A$  es un conjunto **linealmente dependiente** (L.D.) si existen escalares no todos nulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$  tales que

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r}_{\text{combinación lineal}} = \theta_v,$$

Si  $A$  no es un conjunto L.D. se dice que es **linealmente independiente** (L.I.).

**Definición 6.1.4**  $S$  es un conjunto **linealmente independiente** si todo subconjunto finito de  $S$  es L.I.

Observaciones:

1. Todo conjunto que consta de un único vector distinto del nulo es L.I.
2. Todo conjunto que contiene al vector nulo es L.D.

**Ejemplo 6.1.2** Muestre que  $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ , es un conjunto L.I.

El teorema siguiente establece la condición para que una matriz sea diagonalizable.

**Teorema 6.1.2** Una matriz  $A$  de  $n \times n$  es diagonalizable si y sólo si tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes.

**Demostración:** Suponga que  $A$  es semejante a  $D$ . Entonces,

$$P^{-1}AP = D,$$

es una matriz diagonal, de manera que

$$AP = PD \tag{6.1.1}$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y sea  $\mathbf{x}_j, j = 1, 2, \dots, n$  la  $j$ -ésima columna de  $P$ . Resulta que la  $j$ -ésima columna de la matriz  $AP$  es  $A\mathbf{x}_j$ , y la  $j$ -ésima columna de  $PD$  es  $\lambda_j \mathbf{x}_j$ .

Por lo tanto, con base en (6.1.1), tenemos

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j. \tag{6.1.2}$$

Como  $P$  es una matriz no singular, sus columnas son linealmente independientes y, por lo tanto, todas son distintas de cero. En consecuencia,  $\lambda_j$  es un valor propio de  $A$ , y  $\mathbf{x}_j$  es un vector propio correspondiente.

Recíprocamente, suponga que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son  $n$  valores propios de  $A$ , y que los vectores propios correspondientes,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ , son linealmente independientes. Sea  $P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n)$  la matriz cuya  $j$ -ésima columna es  $\mathbf{x}_j$ . Como las columnas de  $P$  son linealmente independientes,  $P$  es no singular. A partir de (6.1.2) obtenemos (6.1.1), lo cual implica que  $A$  es diagonalizable. Esto completa la demostración.

**Observación:** Si  $A$  es una matriz diagonalizable,  $P^{-1}AP = D$ , donde  $D$  es una matriz diagonal. La demostración del teorema anterior implica que los elementos de la diagonal de  $D$  son los valores propios de  $A$ . Además,  $P$  es una matriz cuyas columnas son, respectivamente,  $n$  vectores propios linealmente independientes de  $A$ . Observe también que, según el teorema, el orden de las columnas de  $P$  determina el orden de las entradas de la diagonal de  $D$ .

**Ejemplo 6.1.3** (El orden importa) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 3$ . Los vectores propios correspondientes

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes (verificar). Por lo tanto,  $A$  es diagonalizable. Aquí

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, si  $\lambda_1 = 3$  y  $\lambda_2 = 2$  (cambiamos el orden), entonces

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 6.1.4** (Matriz no diagonalizable) *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 1$ . Los vectores propios asociados a  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son vectores de la forma

$$\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $r$  es cualquier número real distinto de cero. Como  $A$  no tiene dos vectores propios linealmente independientes, concluimos que  $A$  no es diagonalizable.

El siguiente es un teorema útil, ya que identifica una clase amplia de matrices que pueden diagonalizarse.

**Teorema 6.1.3** *Si todas las raíces del polinomio característico de una matriz  $A$  de  $n \times n$  son distintas (es decir, si todas son diferentes entre sí),  $A$  es diagonalizable.*

**Demostración:** *Sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  los valores propios (eigenvalores) distintos de  $A$ , y sea  $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  un conjunto de vectores propios asociados. Queremos demostrar que  $S$  es linealmente independiente.*

*Suponga que  $S$  es linealmente dependiente. Entonces, algún vector  $\mathbf{x}_j$  es una combinación lineal de los vectores que le preceden en  $S$ . Podemos suponer que  $S_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{j-1}\}$  es linealmente independiente pues, de otra forma, uno de los vectores en  $S_1$  sería una combinación lineal de los que le preceden y podríamos elegir un nuevo conjunto  $S_2$ , y así sucesivamente. En consecuencia, tenemos que  $S_1$  es linealmente independiente y que*

$$\mathbf{x}_j = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_{j-1} \mathbf{x}_{j-1} \quad (6.1.3)$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_{j-1}$  son escalares. Premultiplicando ambos lados de la ecuación (6.1.3) por  $A$  (multiplicando por la izquierda), obtenemos

$$A\mathbf{x}_j = A(c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_{j-1} \mathbf{x}_{j-1}) \quad (6.1.4)$$

$$= c_1 A\mathbf{x}_1 + c_2 A\mathbf{x}_2 + \dots + c_{j-1} A\mathbf{x}_{j-1} \quad (6.1.5)$$

Como  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j$  son valores propios de  $A$ , y  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_j$  son sus vectores propios asociados, sabemos que  $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$  para  $i = 1, 2, \dots, j$ . Al sustituir en (6.1.4), tenemos

$$\lambda_j \mathbf{x}_j = c_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_{j-1} \lambda_{j-1} \mathbf{x}_{j-1}. \quad (6.1.6)$$

Al multiplicar (6.1.3) por  $\lambda_j$ , obtenemos

$$\lambda_j \mathbf{x}_j = \lambda_j c_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_j c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_j c_{j-1} \mathbf{x}_{j-1} \quad (6.1.7)$$

Restando de (6.1.6), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_j \mathbf{x}_j - \lambda_j \mathbf{x}_j \\ &= c_1 (\lambda_1 - \lambda_j) \mathbf{x}_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_j) \mathbf{x}_2 + \cdots + c_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \mathbf{x}_{j-1} \end{aligned}$$

Como  $S_1$  es linealmente independiente, debemos tener

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_j) = 0, \quad c_2 (\lambda_2 - \lambda_j) = 0, \dots, \quad c_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) = 0$$

Ahora,

$$\lambda_1 - \lambda_j \neq 0, \quad \lambda_2 - \lambda_j \neq 0, \dots, \quad \lambda_{j-1} - \lambda_j \neq 0$$

(ya que las  $\lambda$  son distintas), lo que implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{j-1} = 0$$

De acuerdo con la ecuación (6.1.3), concluimos que  $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ , lo cual es imposible si  $\mathbf{x}_j$  es un vector propio. Por lo tanto,  $S$  es linealmente independiente y, con ello  $A$  es diagonalizable.

**Observación:** En la demostración del teorema, en realidad hemos establecido el siguiente resultado (de mayor importancia): sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ , y sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , donde  $k$  son valores propios distintos de  $A$ , con vectores propios asociados  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ . Entonces,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  son linealmente independientes.

Si no todas las raíces del polinomio característico de  $A$  son distintas,  $A$  puede o no ser diagonalizable. El polinomio característico de  $A$  puede escribirse como el producto de  $n$  factores, cada uno de la forma  $\lambda - \lambda_j$ , donde  $\lambda_j$  es una raíz del polinomio característico, y los valores propios de  $A$  son las raíces del polinomio característico de  $A$ . Así, el polinomio característico puede escribirse como

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  son los valores propios distintos de  $A$ , y  $k_1, k_2, \dots, k_r$  son enteros cuya suma es  $n$ . El entero  $k_i$  se denomina multiplicidad de  $\lambda_i$ .

**Ejemplo 6.1.5** El valor propio  $\lambda = 1$  es un valor propio de multiplicidad 2 de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es posible demostrar que  $A$  puede diagonalizarse si y sólo si para cada valor propio  $\lambda_j$ , de multiplicidad  $k_j$ , pueden encontrarse  $k_j$  vectores propios linealmente independientes. Esto significa que el espacio solución del sistema lineal  $(\lambda_j I_n - A) \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tiene dimensión  $k_j$ . También puede demostrarse que si  $\lambda_j$  es un valor propio de  $A$ , de multiplicidad  $k_j$ , es imposible encontrar más de  $k_j$  vectores propios linealmente independientes asociados con  $\lambda_j$ .

Consideremos los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 6.1.6** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de  $A$  es  $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$ , así que los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  y  $\lambda_3 = 1$ . En consecuencia,  $\lambda_2 = 1$  es un valor propio de multiplicidad 2. Consideremos ahora los vectores propios asociados a los valores propios  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , mismos que se obtienen resolviendo el sistema lineal  $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde  $r$  es cualquier número, así que la dimensión del espacio solución del sistema lineal  $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es 1. No existen dos vectores linealmente independientes asociados con  $\lambda_2 = 1$ . Por lo tanto,  $A$  no puede diagonalizarse.

**Ejemplo 6.1.7** Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de  $A$  es  $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$ , de manera que los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 1$ ; nuevamente,  $\lambda_2 = 1$  es un valor propio de multiplicidad 2. Consideremos ahora el espacio solución de  $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , esto es, de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix}$$

para cualesquiera números  $r$  y  $s$ . Note que este vector puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

esto quiere decir que el vector solución está siendo generado por los vectores de la derecha, los cuales son l.i.

En consecuencia, podemos tomar como vectores propios  $\mathbf{x}_2$  y  $\mathbf{x}_3$  los vectores

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, buscamos un vector propio asociado con  $\lambda_1 = 0$ . Para ello tenemos que resolver el sistema homogéneo  $(0_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , o

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix},$$

para cualquier número  $t$ . Así,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado con  $\lambda_1 = 0$ . Como  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  y  $\mathbf{x}_3$  son linealmente independientes,  $A$  puede diagonalizarse.

Por lo tanto, una matriz de  $n \times n$  no puede diagonalizarse si no tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes.

En resumen: El procedimiento para diagonalizar una matriz  $A$  es el siguiente.

Paso 1. Encontrar el polinomio característico  $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$  de  $A$ .

Paso 2. Determinar las raíces del polinomio característico de  $A$ .

Paso 3. Para cada valor propio  $\lambda_j$  de  $A$ , de multiplicidad  $k_j$ , determinamos una base para el espacio solución de  $(\lambda_j I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (el espacio propio asociado a  $\lambda_j$ ). Si la dimensión del espacio propio es menor que  $k_j$ , entonces  $A$  no es diagonalizable. De acuerdo con ello, determinamos  $n$  vectores propios linealmente independientes de  $A$ .

Paso 4.  $P$  es la matriz cuyas columnas son los  $n$  vectores propios linealmente independientes determinados en el paso 3. Entonces,  $P^{-1}AP = D$ , es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de  $A$  correspondientes a las columnas de  $P$ .