CAPÍTULO 6

Valores y vectores propios

Todas las matrices que consideraremos en este capítulo serán cuadradas. Sea A una matriz de $n \times n$. Una cuestión de considerable importancia en una gran variedad de problemas de aplicación, es la determinación de vectores $\boldsymbol{x}$, si los hay, tales que $\boldsymbol{x}$ y $A\boldsymbol{x}$ sean paralelos. Tal dificultad aparece en todas las aplicaciones relacionadas con las vibraciones: en aerodinámica, elasticidad, física nuclear, mecánica, ingeniería química, biología, ecuaciones diferenciales, etcétera. En esta sección formularemos el problema con precisión, y definiremos parte de la terminología pertinente; en la siguiente resolveremos el problema para matrices simétricas, y analizaremos brevemente la situación en el caso general.

Definición 6.0.1 *Sea A una matriz de $n \times n$. El número real λ es un valor propio (también conocidos como, valores característicos, autovalores o incluso eigenvalores) de A si existe un vector $\boldsymbol{x}$ distinto de cero en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{6.0.1}$$

Todo vector $\boldsymbol{x}$ distinto de cero que satisfaga (6.0.1) es un vector propio de A, asociado con el valor propio λ. Los valores propios también se llaman valores característicos, autovalores o eigenvalores (del alemán eigen, que significa "propio"). De manera similar, los vectores propios también se llaman vectores característicos, autovectores o eigenvectores.

Observe que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ siempre satisface (6.0.1), pero $\mathbf{0}$ no es un vector propio, pues, como hemos insistido, un vector propio debe ser un vector no nulo.

Observación: En la definición anterior, el número λ puede ser real o complejo, y el vector $\boldsymbol{x}$ puede tener componentes reales o complejos.

Ejemplo 6.0.1 *Si A es la matriz identidad I_n, el único valor propio es $\lambda = 1$; todo vector distinto de cero en $\mathbb{R}^n$ es un vector propio de A, asociado con el valor propio $\lambda = 1$:*

$$I_n\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x}$$

Ejemplo 6.0.2 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A *asociado al valor propio* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$*. Además,*

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de modo que

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A *asociado al valor propio* $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$*.*

Ejemplo 6.0.3 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de modo que $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es un vector propio de* A*, asociado con el valor propio* $\lambda_1 = 0$*.*
Además,

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A*, asociado con el valor propio* $\lambda_2 = 1$ *(verifique).*

El ejemplo resalta el hecho de que, aunque por definición el vector cero no puede ser un vector propio, el número cero sí puede ser un valor propio.

Definición 6.0.2 *Sea* $A = (a_{ij})$ *una matriz de* $n \times n$. *El determinante*

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

es el polinomio característico de A. *La ecuación*

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

es la ecuación característica de A.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es (verifique)

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

En el desarrollo de un determinante de una matriz de $n \times n$, cada término es un producto de n elementos de la matriz, el cual tiene exactamente un elemento de cada fila (renglón) y un elemento de cada columna. En consecuencia, si desarrollamos $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, obtenemos un polinomio de grado n. Un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n raíces (contando las repeticiones), algunas de las cuales pueden ser números complejos.

Entonces, podemos escribir

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Si hacemos $\lambda = 0$ en $\det(\lambda I_n - A)$, al igual que en la expresión de la derecha, obtenemos

$\det(-A) = c_n$, lo cual muestra que el término constante c_n es $(-1)^n \det(A)$. Con este resultado se establece el siguiente teorema.

En el siguiente teorema relacionaremos el polinomio característico de una matriz con sus valores propios.

Teorema 6.0.1 *Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A.*

Demostración: *Sea λ un valor propio de A, asociado con el vector propio $\boldsymbol{x}$. Entonces, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, lo cual se puede escribir como*

$$A\boldsymbol{x} = (\lambda I_n)\,\boldsymbol{x}$$

o

$$(\lambda I_n - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{6.0.2}$$

un sistema homogéneo de n ecuaciones en n incógnitas. Este sistema tiene una solución no *trivial si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes se anula, es decir, si y sólo si* $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Recíprocamente, si λ *es una raíz real del polinomio característico de* A*, entonces* $\det(\lambda I_n - A) = 0$*, de modo que el sistema homogéneo* (6.0.2) *tiene una solución no trivial* $\boldsymbol{x}$*. Por lo tanto,* λ *es un valor propio de* A*.*

En consecuencia, para determinar los valores propios de una matriz dada A, debemos determinar las raíces de su polinomio característico $f(\lambda)$. Hay muchos métodos para determinar aproximaciones a las raíces de un polinomio, algunos más eficaces que otros; de hecho, muchos programas de computadora permiten determinar las raíces de un polinomio. Dos resultados que suelen ser útiles a este respecto son:

1. El producto de todas las raíces del polinomio

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

es $(-1)^n a_n$.

2. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros, $f(\lambda)$ no puede tener una raíz racional que no sea un entero. Así, uno sólo debe verificar los factores enteros de a_n como posibles raíces racionales de $f(\lambda)$. Por supuesto, $f(\lambda)$ podría tener raíces irracionales o complejas.

Los **vectores propios** correspondientes se obtienen al sustituir el valor de λ en la ecuación (6.0.2) y resolver el sistema homogéneo resultante.

Ejemplo 6.0.4 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Verifique que el polinomio característico viene dado por

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

Luego, las posibles raíces enteras de $f(\lambda)$ *son* $\pm 1, \pm 2, \pm 3 \text{y} \pm 6$. *Al sustituir estos valores en* $f(\lambda)$, *tenemos que* $f(1) = 0$, *de modo que* $\lambda = 1$ *es una raíz de* $f(\lambda)$. *Por lo tanto,* $(\lambda - 1)$ *es* *un factor de $f(\lambda)$. Al dividir $f(\lambda)$ entre $(\lambda-1)$, obtenemos (verifique)*

$$f(\lambda)=(\lambda-1)\left(\lambda^2-5\lambda+6\right).$$

Al factorizar $\lambda^2-5\lambda+6$, tenemos

$$f(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Entonces, los valores propios de A son

$$\lambda_1=1, \quad \lambda_2=2, \quad \lambda_3=3.$$

Para determinar un vector propio $\boldsymbol{x}_1$, asociado con $\lambda_1=1$, formamos el sistema lineal

$$(1I_3-A)\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 1-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real r. *Por lo tanto, para* $r = 2$,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, *asociado con* $\lambda_1 = 1$.

Para determinar un vector propio $\boldsymbol{x}_2$ *asociado con* $\lambda_2 = 2$, *formamos el sistema lineal*

$$(2I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 2-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real r*. En consecuencia, para* $r = 4$*,*

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_2 = 2$.

Para determinar un vector propio $\boldsymbol{x}_3$ asociado con $\lambda_3 = 3$, formamos el sistema lineal

$$(3I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

y vemos que una solución es (verifique)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{pmatrix}$$

para cualquier número real r. Así, para $r = 4$,

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_3 = 3$.

Ejemplo 6.0.5 *Calcule los valores propios y los vectores propios asociados de*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sol: El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & 0 & -3 \\ -1 & \lambda - 0 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

(verifique). Determinamos que $\lambda = 3$ es una raíz de $p(\lambda)$. Al dividir $p(\lambda)$ entre $(\lambda - 3)$, obtenemos $p(\lambda) = (\lambda - 3)\left(\lambda^2 + 1\right)$. Entonces, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$$

Para obtener un vector propio $\boldsymbol{x}_1$ asociado con $\lambda_1 = 3$, sustituimos $\lambda = 3$ en (6.0.2), lo cual *nos da como resultado*

$$\begin{pmatrix} 3-0 & 0 & -3 \\ -1 & 3-0 & 1 \\ 0 & -1 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos que el vector $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ *es una solución para cualquier número real* r *(verifique).*
Al hacer $r = 1$*, concluimos que*

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A*, asociado con* $\lambda_1 = 3$*. Para obtener un vector propio* $\boldsymbol{x}_2$ *asociado con*

$\lambda_2 = i$, sustituimos $\lambda = i$ en (6.0.2), lo que da como resultado

$$\begin{pmatrix} i-0 & 0 & -3 \\ -1 & i-0 & 1 \\ 0 & -1 & i-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos que el vector $\begin{pmatrix} (-3i)r \\ (-3+i)r \\ r \end{pmatrix}$ *es una solución para cualquier número r (verifique).* Al *hacer $r = 1$, concluimos que*

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3i \\ -3+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A asociado con $\lambda_2 = i$. De manera similar, determinamos que

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3i \\ -3-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_3 = -i$.

En resumen: El procedimiento para determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz, es como sigue.

Paso 1. Determinar las raíces del polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Éstas son los valores propios de A.

Paso 2. Para cada valor propio λ, determine todas las soluciones no triviales para el sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Éstos son los vectores propios de A, asociados con el valor propio λ.

Por supuesto, el polinomio característico de una matriz dada puede tener algunas raíces complejas, e incluso podría carecer por completo de raíces reales. Sin embargo, en el importante caso de las matrices simétricas, todas las raíces del polinomio característico son reales.

El conjunto S que consiste en todos los vectores propios de A asociados con λ_j, junto con el vector nulo, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, denominado espacio propio asociado con λ_j

(también se le conoce como espacio invariante).

Precaución: Al determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz A, evite cometer el error común de transformar primero A a la forma escalonada reducida por filas B, y luego determinar los valores y vectores propios de B.

6.1. Diagonalización

Definición 6.1.1 *Se dice que una matriz B es semejante o similar a una matriz A, si existe una matriz no singular P tal que*

$$B = P^{-1}AP.$$

Ejemplo 6.1.1 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

y

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, B es semejante a A.

Se deja al lector la demostración de la validez de las siguientes propiedades elementales de la semejanza.

1. A es semejante a A.

2. Si B es semejante a A, entonces A es semejante a B.

3. Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

De acuerdo con la propiedad 2, podemos reemplazar las proposiciones "A es semejante a B" y "B es semejante a A" por "A y B son semejantes".

Definición 6.1.2 *Diremos que la matriz A es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. En este caso, también decimos que A puede diagonalizarse.*

Si A y B son como en el ejemplo anterior, entonces A es diagonalizable, ya que es semejante a B.

Teorema 6.1.1 *Matrices semejantes tienen los mismos valores propios.*

Demostración: *Sean A y B semejantes. Entonces, $B = P^{-1}AP$ para alguna matriz no singular P. A continuación demostraremos que A y B tienen los mismos polinomios característicos,*

$f_A(\lambda)$ y $f_B(\lambda)$, respectivamente. Tenemos

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det\left(\lambda I_n - P^{-1}AP\right) \\ &= \det\left(P^{-1}\lambda I_n P - P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}(\lambda I_n - A)P\right) \\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det(\lambda I_n - A)\det(P) \\ &= \det\left(P^{-1}\right)\det(P)\det(\lambda I_n - A) \\ &= \det(\lambda I_n - A) = f_A(\lambda) \end{aligned}$$

Como $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$, resulta que A y B tienen los mismos valores propios.

Note que los valores propios de una matriz diagonal son las entradas de su diagonal principal.

Definición 6.1.3 *Sean $V = \mathbb{K}^n$ y $A = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V$; A es un conjunto* **linealmente**

dependiente $(L.D.)$ *si existen escalares no todos nulos* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ *tales que*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r}_{\textit{combinación lineal}} = \theta_v,$$

Si A no es un conjunto $L.D.$ se dice que es **linealmente independiente** $(L.I.)$.

Definición 6.1.4 *S es un conjunto* **linealmente independiente** *si todo subconjunto finito de S es $L.I.$*

Observaciones:

1. Todo conjunto que consta de un único vector distinto del nulo es $L.I.$
2. Todo conjunto que contiene al vector nulo es $L.D.$

Ejemplo 6.1.2 *Muestre que* $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$, *es un conjunto L.I.*

El teorema siguiente establece la condición para que una matriz sea diagonalizable.

Teorema 6.1.2 *Una matriz* A *de* $n \times n$ *es diagonalizable si y sólo si tiene* n *vectores propios linealmente independientes.*

Demostración: *Suponga que* A *es semejante a* D. *Entonces,*

$$P^{-1}AP = D,$$

es una matriz diagonal, de manera que

$$AP = PD \tag{6.1.1}$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y sea $\boldsymbol{x}_j, j = 1, 2, \ldots, n$ *la* j*-ésima columna de* P*. Resulta que la* j*-ésima columna de la matriz* AP *es* $A\boldsymbol{x}_j$*, y la* j*-ésima columna de* PD *es* $\lambda_j \boldsymbol{x}_j$*.*

Por lo tanto, con base en (6.1.1)*, tenemos*

$$A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j. \tag{6.1.2}$$

Como P *es una matriz no singular, sus columnas son linealmente independientes y, por lo tanto, todas son distintas de cero. En consecuencia,* λ_j *es un valor propio de* A*, y* $\boldsymbol{x}_j$ *es un vector propio correspondiente.*

Recíprocamente, suponga que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *son* n *valores propios de* A*, y que los vectores propios correspondientes,* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$*, son linealmente independientes. Sea* $P = (\ \boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n$

la matriz cuya j-ésima columna es $\boldsymbol{x}_j$. Como las columnas de P son linealmente independientes, P es no singular. A partir de (6.1.2) obtenemos (6.1.1), lo cual implica que A es diagonalizable. Esto completa la demostración.

Observación: Si A es una matriz diagonalizable, $P^{-1}AP = D$, donde D es una matriz diagonal. La demostración del teorema anterior implica que los elementos de la diagonal de D son los valores propios de A. Además, P es una matriz cuyas columnas son, respectivamente, n vectores propios linealmente independientes de A. Observe también que, según el teorema, el orden de las columnas de P determina el orden de las entradas de la diagonal de D.

Ejemplo 6.1.3 (El orden importa) *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = 3$*. Los vectores propios correspondientes*

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes (verificar). Por lo tanto, A *es diagonalizable. Aquí*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, si $\lambda_1 = 3$ *y* $\lambda_2 = 2$ *(cambiamos el orden), entonces*

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.1.4 (Matriz no diagonalizable) *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A *son* $\lambda_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 1$. *Los vectores propios asociados a* λ_1 *y* λ_2 *son vectores de la forma*

$$\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde r es cualquier número real distinto de cero. Como A no tiene dos vectores propios linealmente independientes, concluimos que A no es diagonalizable.

El siguiente es un teorema útil, ya que identifica una clase amplia de matrices que pueden diagonalizarse.

Teorema 6.1.3 *Si todas las raíces del polinomio característico de una matriz A de $n \times n$ son distintas (es decir, si todas son diferentes entre sí), A es diagonalizable.*

Demostración: *Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$* los *valores propios (eigenvalores) distintos de A, y sea $S = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ un conjunto de vectores propios asociados. Queremos demostrar que S es linealmente independiente.*

Suponga que S es linealmente dependiente. Entonces, algún vector $\boldsymbol{x}_j$ es una combinación lineal de los vectores que le preceden en S. Podemos suponer que $S_1 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{j-1}\}$ es *linealmente independiente pues, de otra forma, uno de los vectores en S_1 sería una combinación lineal de los que le preceden y podríamos elegir un nuevo conjunto S_2, y así sucesivamente. En consecuencia, tenemos que S_1 es linealmente independiente y que*

$$\boldsymbol{x}_j = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1} \tag{6.1.3}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}$ son escalares. Premultiplicando ambos lados de la ecuación (6.1.3) por A (multiplicando por la izquierda), obtenemos

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x}_j &= A\left(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1}\right) && (6.1.4)\\ &= c_1A\boldsymbol{x}_1 + c_2A\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}A\boldsymbol{x}_{j-1} && (6.1.5)\end{aligned}$$

Como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ son valores propios de A, y $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_j$ son sus vectores propios asociados, sabemos que $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, j$. Al sustituir en (6.1.4), tenemos

$$\lambda_j\boldsymbol{x}_j = c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\lambda_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1}. \tag{6.1.6}$$

Al multiplicar (6.1.3) por λ_j, obtenemos

$$\lambda_j\boldsymbol{x}_j = \lambda_jc_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_jc_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_jc_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1} \tag{6.1.7}$$

Restando de (6.1.6), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_j \boldsymbol{x}_j - \lambda_j \boldsymbol{x}_j \\ &= c_1 (\lambda_1 - \lambda_j) \boldsymbol{x}_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_j) \boldsymbol{x}_2 + \cdots + c_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \boldsymbol{x}_{j-1} \end{aligned}$$

Como S_1 es linealmente independiente, debemos tener

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_j) = 0, \quad c_2 (\lambda_2 - \lambda_j) = 0, \ldots, \quad c_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) = 0$$

Ahora,

$$\lambda_1 - \lambda_j \neq 0, \quad \lambda_2 - \lambda_j \neq 0, \ldots, \quad \lambda_{j-1} - \lambda_j \neq 0$$

(ya que las λ son distintas), lo que implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{j-1} = 0$$

De acuerdo con la ecuación (6.1.3), concluimos que $\boldsymbol{x}_j = \mathbf{0}$, lo cual es imposible si $\boldsymbol{x}_j$ es un vector propio. Por lo tanto, S es linealmente independiente y, con ello A es diagonalizable.

Observación: En la demostración del teorema, en realidad hemos establecido el siguiente resultado (de mayor importancia): sea A una matriz de $n \times n$, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, donde k son valores propios distintos de A, con vectores propios asociados $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$. Entonces, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ son linealmente independientes.

Si no todas las raíces del polinomio característico de A son distintas, A puede o no ser diagonalizable. El polinomio característico de A puede escribirse como el producto de n factores, cada uno de la forma $\lambda - \lambda_j$, donde λ_j es una raíz del polinomio característico, y los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A. Así, el polinomio característico puede escribirse como

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios distintos de A, y $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son enteros cuya suma es n. El entero k_i se denomina multiplicidad de λ_i.

Ejemplo 6.1.5 *El valor propio* $\lambda = 1$ *es un valor propio de multiplicidad 2 de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es posible demostrar que A puede diagonalizarse si y sólo si para cada valor propio λ_j, de multiplicidad k_j, pueden encontrarse k_j vectores propios linealmente independientes. Esto significa que el espacio solución del sistema lineal $(\lambda_j I_n - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tiene dimensión k_j. También puede demostrarse que si λ_j es un valor propio de A, de multiplicidad k_j, es imposible encontrar más de k_j vectores propios linealmente independientes asociados con λ_j.

Consideremos los ejemplos siguientes.

Ejemplo 6.1.6 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A *es* $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$*, así que los valores propios de* A *son* $\lambda_1 = 0$*,* $\lambda_2 = 1$ *y* $\lambda_3 = 1$*. En consecuencia,* $\lambda_2 = 1$ *es un valor propio de multiplicidad 2. Consideremos ahora los vectores propios asociados a los valores propios* $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$*, mismos que se obtienen resolviendo el sistema lineal* $(1I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde r es cualquier número, así que la dimensión del espacio solución del sistema lineal $(1I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ es 1. No existen dos vectores linealmente independientes asociados con $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto, A no puede diagonalizarse.

Ejemplo 6.1.7 *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$, de manera que los valores propios de A son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$; nuevamente, $\lambda_2 = 1$ es un valor propio de multiplicidad 2. Consideremos ahora el espacio solución de $(1I_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, esto es, de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix}$$

para cualesquiera números r *y* s*. Note que este vector puede escribirse como*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

esto quiere decir que el vector solución está siendo generado por los vectores de la derecha, los cuales son l.i.

En consecuencia, podemos tomar como vectores propios $\boldsymbol{x}_2$ *y* $\boldsymbol{x}_3$ *los vectores*

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, buscamos un vector propio asociado con $\lambda_1 = 0$. *Para ello tenemos que resolver el sistema homogéneo* $(0_3 - A)\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, *o*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix},$$

para cualquier número t. *Así,*

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado con $\lambda_1 = 0$. *Como* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ *y* $\boldsymbol{x}_3$ *son linealmente independientes,* A *puede diagonalizarse.*

Por lo tanto, una matriz de $n \times n$ no puede diagonalizarse si no tiene n vectores propios linealmente independientes.

En resumen: El procedimiento para diagonalizar una matriz A es el siguiente.

Paso 1. Encontrar el polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ de A.

Paso 2. Determinar las raíces del polinomio característico de A.

Paso 3. Para cada valor propio λ_j de A, de multiplicidad k_j, determinamos una base para el espacio solución de $(\lambda_j I_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (el espacio propio asociado a λ_j. Si la dimensión del espacio propio es menor que k_j, entonces A no es diagonzalizable. De acuerdo con ello, determinamos n vectores propios linealmente independientes de A.

Paso 4. P es la matriz cuyas columnas son los n vectores propios linealmente independientes determinados en el paso 3. Entonces, $P^{-1}AP = D$, es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A correspondientes a las columnas de P.