CAPÍTULO 4

Conceptos básicos de Vectores en $\mathbb{R}^n$

4.1 Vectores en $\mathbb{R}^n$

Definición 4.1.1 *Llamamos vector de $\mathbb{R}^n$ a una lista ordenada de n números reales, la cual denotamos como*

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Aquí x_k lo llamamos k-ésima componente del vector $\boldsymbol{x}$.

El vector nulo o vector cero en $\mathbb{R}^n$ viene dado por

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.1.1 *El vector* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *es un vector de $\mathbb{R}^4$ y su primera, segunda, tercera y cuarta componentes son* 5, 10, -3 *y* 5, *en ese orden.*

Los vectores

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores de $\mathbb{R}^n$. A estos vectores los llamamos vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.1.2 (Igualdad de vectores) *Dos vectores $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ son iguales si y solo si $x_i = y_i$ $\forall i \in 1, \ldots, n$. Es decir,*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \forall i \in 1, \ldots, n.$$

Definición 4.1.3 *Dados $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, se define la suma de vectores por*

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

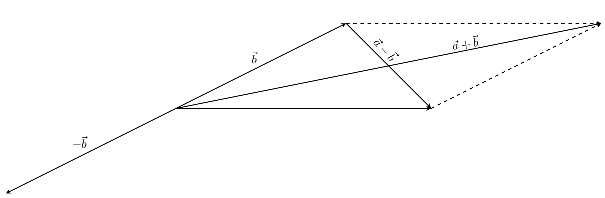
Definición 4.1.4 *Dados $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el producto por escalar por*

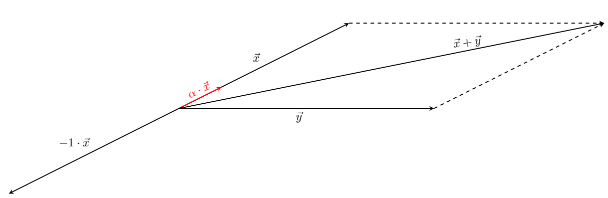
$$\lambda \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

Definición 4.1.5 *Se define la resta de vectores $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ por*

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}).$$

En la siguiente figura se muestra el significado gráfico de la suma, la resta, el producto por escalar de vectores.





Definición 4.1.6 *Sean $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y sean α, β dos números reales. Entonces*

1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *(Ley clau. para +).*
2. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ *(Ley asoc. para +).*
3. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ *(Ley conm. para +).*
4. *Existe un único vector* $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{z} = 0)$. *(Elemento neutro para la suma).*
5. *Para cada* $\boldsymbol{u}$, *existe un único vector* $-\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ *(Existencia del opuesto para suma).*
6. $\alpha\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *(Ley clausura para el producto por escalar).*
7. $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ *(Ley dist. del producto por escalar resp +).*
8. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$ *(Ley dist. del producto por escalar respecto a + de escalares).*
9. $(\alpha\beta)\boldsymbol{u} = \alpha(\beta\boldsymbol{u}) = \beta(\alpha\boldsymbol{u})$ *(Ley asoc. respecto al producto por escalares).*
10. $\alpha\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, *si y solo si,* $\alpha = 0$ *ó* $\boldsymbol{u} = 0$.

Ejercicio 4.1
1. *Calcule* $(2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})-(5\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v})+7\boldsymbol{u}$.
2. *Determine el vector* $\boldsymbol{x}$ *tal que* $2\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{u}$.

Definición 4.1.7 *Diremos que dos vectores* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *son paralelos si y solo si* $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v}$, *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 4.1.8 (Combinación Lineal) *Dados* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, *al vector*

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k$$

lo llamamos combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. *A los escalares* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *los llamamos coeficientes de la combinación lineal.*

Ejercicio 4.2 *Sean* $\boldsymbol{u} = \binom{-1}{2}$ *y* $\boldsymbol{v} = \binom{2}{5}$ *y* $\boldsymbol{w} = \binom{3}{-2}$. *Calcule la combinación lineal de ellos dada por* $3\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}$. *¿los vectores* $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *son combinaciones lineales de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$?

Definición 4.1.9 (Conjunto Generado y Conjunto Generador) *Al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ *lo representamos por*

$$V := \mathrm{Gen}\,\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} = \{\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{v}_k, \mathrm{con}\,\lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

El conjunto V *es generado por el conjunto* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ *a este conjunto lo llamamos conjunto generador de* V.

El conjunto generado es único mientras que el conjunto generador NO es único.

Ejemplo 4.1.2 *El siguiente conjunto representa la solución de un sistema de ecuaciones lineales*

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 3r - s \\ r + 5s \\ r \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que los elementos de V se escriben

$$\begin{pmatrix} 3r - s \\ r + 5s \\ r \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lo cual indica que V está siendo generado por el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definición 4.1.10 (Conjunto l.i.) *Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ es linealmente independiente si los únicos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tales que*

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

son todos cero.

Ejercicio 4.3 *Muestre que*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

es un conjunto l.i. y que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

es un conjunto l.d.

Note que todo conjunto de $\mathbb{R}^n$ que contenga al vector nulo es un conjunto l.d.

Definición 4.1.11 (Producto escalar) *Dados $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, definimos $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ el producto escalar entre $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, como el escalar dado por*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Ejercicio 4.4 *Dados* $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. *Calcule* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$, $(3\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}, (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$ *y* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$.

Teorema 4.1.1 *Sean* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Entonces*

1. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ *(Ley conmutativa para* $\cdot$*)*
2. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$. *(Distributividad de* $\cdot$ *respecto de* $+$*)*
3. $\alpha(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (\alpha \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (\alpha \boldsymbol{v})$.
4. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, *si y solo si,* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Note que no tiene sentido la prop. asociativa para $\cdot$.

Definición 4.1.12

1. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v}$ *es* **ortogonal** *a* $\boldsymbol{w}$ *si* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$.
2. *un subconjunto* $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un* **conjunto ortogonal** *si* $\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = 0 \quad \forall i \neq j$.
3. *un subconjunto* $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto* **ortonormal** *si es un conjunto ortogonal y* $\|\boldsymbol{v}_i\| = 1 \quad \forall i = \{1, \ldots, n\}$.

Ejercicio 4.5 *Encuentre* α *y* β *de forma que los vectores*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2\beta \\ 7 \end{pmatrix}$$

sean ortogonales.

Definición 4.1.13 (Norma) *Definimos la norma de un vector* $\boldsymbol{u}$ *de* $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|$, *como*

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}.$$

Ejercicio 4.6 *Dados* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Calcule* $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$ *y* $\|\boldsymbol{w}\|$.

Teorema 4.1.2 *Dados los vectores* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tenemos que*

(a) $\|\lambda \boldsymbol{u}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{u}\|$

(b) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$

(c) $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$

(d) $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$ *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*
La igualdad se obtiene, si y solo si, $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v}$ *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ *(Desigualdad triangular).*
La igualdad se cumple, si y solo si, $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v}$ *con* $\lambda \geq 0$.

Demostración: *Para todo* $t \in \mathbb{R}$ *tenemos que* $\|t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 &= (t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(t\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \\ &= t^2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + t(2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = p(t) \end{aligned}$$

donde $p(t) = at^2 + bt + c$ *es un polinomio cuadrático con* $a = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$, $b = 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ *y* $c = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$.

Como $a \geq 0$, *la gráfica de* $p(t)$ *es una parábola cóncava hacía arriba con vértice en el semiplano superior. Recordando que el vértice de* $p(t)$ *es* $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ *entonces*

$$0 \leq c - \frac{b^2}{4a} = \|\boldsymbol{v}\|^2 - \frac{4(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2}{4\|\boldsymbol{u}\|^2}$$

Además, si $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{v}$ *entonces*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| &= |\lambda\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}| = |\lambda||\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}| = |\lambda|\|\boldsymbol{v}\|^2 = |\lambda|\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{v}\| \\ &= \|\lambda\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|. \end{aligned}$$

Obs: 1. La distancia euclidiana entre dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

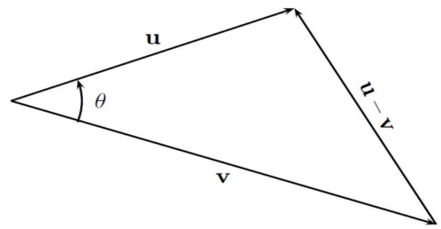
2. Cuando $\|\boldsymbol{w}\| = 1$, se dice que $\boldsymbol{w}$ es un vector unitario.

Ejercicio 4.7 *1. Halle la distancia entre* $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Halle el vector unitario en la dirección $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Definición 4.1.14 (Ángulo entre vectores) *Dados los vectores no nulos* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *de* $\mathbb{R}^n$, *definimos el ángulo determinado por* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *como el menor giro positivo.*

Dados dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no nulos, siempre podemos construir un triángulo como el de la siguiente figura



Al aplicar el Teorema del Coseno a este triángulo, se obtiene

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$$
$$\|\boldsymbol{u}\|^2 - 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$$

Entonces $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$.

Ejercicio 4.8 *Sean* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Calcule el ángulo entre ellos.*

Definición 4.1.15 (Proyección ortogonal) *Si* $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *son vectores de* $\mathbb{R}^n$*, definimos la proyección ortogonal de* $\boldsymbol{v}$ *sobre* $\boldsymbol{u}$ *como el vector*

$$\operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\right)\boldsymbol{u}$$

Llamamos a $\boldsymbol{v}_c = \boldsymbol{v} - \operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ *es ortogonal a* $\boldsymbol{u}$.

Ejercicio 4.9 *Halle* $\operatorname{proy}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ *y la componente vectorial de* $\boldsymbol{v}$ *ortogonal a* $\boldsymbol{u}$ *(esto es* $\boldsymbol{v}_c$ *), para cada uno de los siguientes casos:*

(a) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{u} = e_1$ *y* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

A continuación se introduce el producto cruz, producto únicamente definido para vectores en $\mathbb{R}^3$.

Definición 4.1.16 (**Producto vectorial o producto cruz**) *Sean* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

dos vectores. Se llama **producto vectorial** *o* **producto cruz** *de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (en ese orden) al vector,*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

ó

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Propiedades 4.1.1 (**Propiedades del producto vectorial**) *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\alpha\in\mathbb{R}$. Se tienen las siguientes propiedades,*

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$
2. $\vec{a}\times\vec{a}=\theta$
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$
4. $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\alpha\vec{b})$

Demostración: Para 2). Sea $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$, luego

$$\vec{a}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\right)=\theta.$$

Para 3). Sea $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ y $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$, luego

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})&=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix}\\ &=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2+c_2 & b_3+c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_3+c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 \end{vmatrix}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right)\\ &=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.\end{aligned}$$

Las otras demostraciones se dejan al lector.

Ejemplo 4.1.3 1. *Sean $\vec{a}=2\vec{i}-1\vec{j}+3\vec{k}$ y $\vec{b}=-\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$. Calcular $\vec{a}\times\vec{b}$ y $\vec{b}\times\vec{a}$.*

2. *Calcular $\vec{i}\times\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}$ y $\vec{k}\times\vec{i}$.*

3. *Calcular* $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k})$, $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{k}$ *y note que en general* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Teorema 4.1.3 *Sean* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *dos vectores no nulos en* $\mathbb{R}$. *Se tiene que,*

1. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \wedge \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$
2. *Si* φ *es el menor ángulo entre* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *entonces,*

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| sin(\varphi)$$

Demostración: Para ii). Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$, luego

$$\begin{aligned} ||\vec{a} \times \vec{b}||^2 =& (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ =& a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 \\ & + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ =& (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ =& ||\vec{a}||^2 \, ||b||^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ =& ||\vec{a}||^2 \, ||b||^2 - (||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| cos(\varphi))^2 \\ =& ||\vec{a}||^2 \, ||b||^2 sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

Así, como $0 \leq \varphi \leq \pi$, entonces $sin(\varphi) \geq 0$

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \, ||b|| sin(\varphi).$$

Corolario 4.1.1 *Dos vectores no nulos* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *son paralelos si y sólo si* $\vec{a} \times \vec{b} = \theta$.

Observaciones:

1. Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos lados de un triángulo, entonces el área A del triángulo está dada por,
$$A = \frac{1}{2} ||\vec{a} \times \vec{b}||.$$
2. $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector ortogonal a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejemplo 4.1.4
1. *Sean* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ *y* $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$. *Calcular un vector unitario ortogonal a* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$.
2. *Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos* $A(1, -1, 0)$, $B(2, 1, -1)$ *y* $C(-1, 1, 2)$.

Definición 4.1.17 *Sean* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *y* $\vec{c}$ *tres vectores. Los productos* $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ *y* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ *se llaman* **producto escalar triple** *y los productos de la forma* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ *y* $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ *se llaman* **producto vectorial triple**.

Teorema 4.1.4 *Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores no nulos.*

1. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
3. $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$ *es el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.*

Demostración: Para 2). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ luego

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) \\
&= c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= \vec{c} \cdot \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \\
&= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

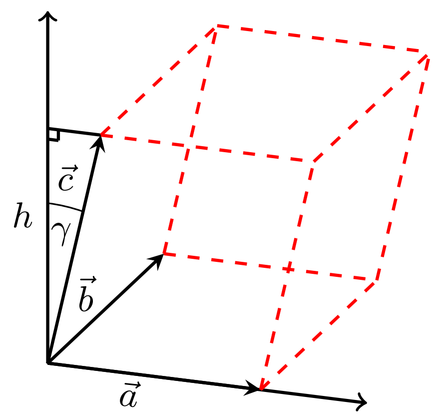


Figura 4.1: $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$ volumen del paralelepípedo.

Para 3). Sean $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ luego basta notar que

$$\begin{aligned}
h = \|proy_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\| &= \left\| \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} (\vec{a} \times \vec{b}) \right\| \\
&= \left| \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2} \right| \|\vec{a} \times \vec{b}\| \\
&= \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}
\end{aligned}$$

Así
$$V = h\|\vec{a} \times \vec{b}\| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|.$$

4.1.1 Otras normas en $\mathbb{R}^n$

Como generalización de la norma Euclideana (la usada usualmente) o norma-2, están las normas-p, definidas también en $\mathbb{K}^n$, cuales vienen dadas por:

1. Norma-1: $\|\boldsymbol{v}\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$.
2. Norma-infinito: $\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$.
3. Norma$-p$: $\|\boldsymbol{v}\|_p = (|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p)^{1/p}$.

Ejercicio 4.10 *Calcular las normas 1, 2 (euclidiana) e ∞ del vector $v = (3, 4, -12)$.*

En el siguiente gráfico podemos ver la diferencia entre las 3 normas más usuales en $\mathbb{R}^2$. En cada gráfico están representados todos los puntos con norma igual a 1 bajo la norma respectiva.

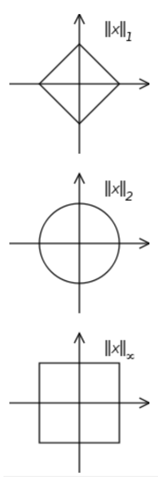


Figura 4.2: Gráfica de $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)||_p = 1\}$
con $p = 1, 2, \infty$.