Versión en revisión

1.6 El campo complejo

Definición 1.11 *Un número complejo es un par ordenado de números reales (a, b). "Ordenado" significa que (a, b) y (b, a) se consideran distintos si $a \neq b$.*
Sean $x = (a, b), y = (c, d)$ dos números complejos. Se escribe $x = y$ si y solamente si $a = c$ y $b = d$. (Nótese que esta definición no es por completo superflua; debe pensarse en la igualdad de los números racionales representados como cocientes de enteros.) Se define

$$\begin{aligned} x + y &= (a + c, b + d) \\ xy &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Teorema 1.5 *Las definiciones anteriores para la adición y la multiplicación vuelven al conjunto de todos los números complejos un campo, con $(0, 0)$ y $(1, 0)$ en lugar de 0 y 1.*

Demostración: *Simplemente se verificarán los axiomas de campo de la Definición 1.8. (Se usa la estructura de campo de $\mathbb{R}$, por supuesto.)*

Sean $x = (a, b), y = (c, d), z = (e, f)$.

(A1) es evidente.

(A2) $x + y = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = y + x$.

(A3)

$$\begin{aligned} (x + y) + z =&(a + c, b + d) + (e, f) \\ =&(a + c + e, b + d + f) \\ =&(a, b) + (c + e, d + f) = x + (y + z). \end{aligned}$$

(A4) $x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = x$.

(A5) Haciendo $-x = (-a, -b)$. *Entonces* $x + (-x) = (0, 0) = 0$.

(M1) es evidente.

(M2) $xy = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = yx$.

(M3)

$$\begin{aligned} (xy)z &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a, b)(ce - df, cf + de) = x(yz) \end{aligned}$$

(M4) $1x = (1, 0)(a, b) = (a, b) = x$.

(M5) Si $x \neq 0$, entonces $(a, b) \neq (0, 0)$, lo cual significa que al menos uno de los números reales a, b es diferente de 0 . En consecuencia, por la Proposición 1.4(d) $a^2 + b^2 > 0$, y se puede definir

$$\frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Versión en revisión

Por tanto,

$$x \cdot \frac{1}{x} = (a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = 1.$$

(D)

$$\begin{aligned} x(y+z) &= (a,b)(c+e,d+f) \\ &= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) \\ &= (ac-bd, ad+bc) + (ae-bf, af+be) \\ &= xy+xz. \end{aligned}$$

Teorema 1.6 *Para números reales cualesquiera a y b se tiene*

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0), \quad (a,0)(b,0) = (ab,0)$$

La demostración es trivial.

El Teorema 1.6 muestra que los números complejos de la forma $(a,0)$ tienen las mismas propiedades aritméticas que los números reales correspondientes a. Por tanto, es posible identificar $(a,0)$ con a. Esta identificación hace del campo real un subcampo del campo complejo.

El lector puede haber notado que hasta ahora se han definido los números complejos sin hacer ninguna referencia a la misteriosa raíz cuadrada de -1. A continuación se muestra que la notación (a,b) es equivalente a la más acostumbrada $a+bi$.

Definición 1.12 $i = (0,1)$.

Teorema 1.7 $i^2 = -1$.

Demostración: $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$.

Teorema 1.8 *Si a y b son dos números reales, será $(a,b) = a+bi$.*

Demostración:

$$\begin{aligned} a+bi &= (a,0)+(b,0)(0,1) \\ &= (a,0)+(0,b) = (a,b). \end{aligned}$$

Definición 1.13 *Si a,b son reales y $z = a+bi$, entonces al número complejo $\bar{z} = a-bi$ se le llama el conjugado de z. Los números a y b son la parte real y la parte imaginaria de z, respectivamente.*

Se escribirá algunas veces

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

Teorema 1.9 *Si z y w son complejos, entonces*

(a) $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$,

(b) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(c) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

(d) $z\bar{z}$ *es real y positivo (excepto cuando* $z = 0$ *).*

Demostración: *(a),(b) y (c) son triviales. Para probar (d), escríbase* $z = a + bi$*, y nótese que* $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Definición 1.14 *Si* z *es un número complejo, su valor absoluto (o módulo)* $|z|$ *es la raíz cuadrada no negativa de* $z\bar{z}$*; es decir,* $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$.

La existencia (y la unicidad) de $|z|$ se concluye a partir del Teorema 1.4 y la parte (d) del Teorema 1.9.

Nótese que cuando x es real, es $\bar{x} = x$, y por consiguiente $|x| = \sqrt{x^2}$. Asi que $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$.

Teorema 1.10 *Siendo* z *y* w *números complejos. Se tiene*

(a) $|z| > 0$ *a menos que* $z = 0$, $|0| = 0$,

(b) $|\bar{z}| = |z|$,

(c) $|zw| = |z||w|$

(d) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

(e) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demostración: *(a) y (b) son evidentes. Si se hace* $z = a + bi$, $w = c + di$*, en donde* a, b, c, d *real. Entonces*

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = |z|^2|w|^2$$

o $|zw|^2 = (|z||w|)^2$*. Ahora (c) deduce de la afirmación de unicidad del Teorema 1.4.*

Para demostrar (d), nótese que $a^2 \leq a^2 + b^2$*, por consiguiente*

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Para demostrar (e), nótese que $\bar{z}w$ *es el conjugado de* $z\bar{w}$*, así que* $z\bar{w} + \bar{z}w = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$*. Por lo tanto*

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Y por último se obtiene (e) extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros.

Versión en revisión

Notación Si $x_1, \ldots, x_n$ son números complejos, escribimos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Terminamos esta sección con una desigualdad importante, corrientemente llamada desigualdad de Schwarz.

Teorema 1.11 *Si $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números complejos, será*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 .$$

Demostración: *Pongamos $A = \Sigma |a_j|^2 ; B = \Sigma |b_j|^2 ; C = \Sigma a_j \bar{b}_j$ (en todas las sumas de esta demostración, j toma los valores $1, \ldots n$). Si $B = 0$, será $b_1 = \cdots = b_n = 0$ y la conclusión es obvia. Supongamos, por tanto, que $B > 0$. Por el Teorema 1.9, tenemos*

$$\begin{aligned}
\sum |Ba_j - Cb_j|^2 &= \sum (Ba_j - Cb_j)\left(B\bar{a}_j - \overline{Cb}_j\right) \\
&= B^2 \sum |a_j|^2 - B\bar{C} \sum a_j \bar{b}_j - BC \sum \bar{a}_j b_j + |C|^2 \sum |b_j|^2 \\
&= B^2 A - B|C|^2 \\
&= B\left(AB - |C|^2\right).
\end{aligned}$$

Como cada término de la primera suma es no negativo, vemos que

$$B\left(AB - |C|^2\right) \geq 0$$

Como $B > 0$, se sigue que $AB - |C|^2 \geq 0$, que es la desigualdad deseada.

Versión en revisión