Versión en revisión

CAPÍTULO 2

Topología básica

2.1 Conjuntos finitos, numerables y no numerables

Empezamos esta sección con una definición del concepto de función.

Definición 2.1 *Consideremos dos conjuntos A y B, cuyos elementos pueden ser objetos cualesquiera, y supongamos que con cada elemento x de A se asocia, de algún modo, un elemento de B que representaremos por $f(x)$. Se dice que f es una función de A en B (o una aplicación o mapeo de A en B). El conjunto A se llama dominio de definición de f (también se dice que f está definida en A) y los elementos de $f(x)$ se llaman valores de f. El conjunto de todos los valores de f se llama rango de f.*

Definición 2.2 *Sean A y B dos conjuntos y f un mapeo o aplicación de A en B. Si $E \subset A$, se define $f(E)$ como el conjunto de todos los elementos $f(x)$ para $x \in E$. A $f(E)$ le llamamos imagen de E bajo f. En esta notación, $f(A)$ es el rango de f. Está claro que $f(A) \subset B$. Si $f(A) = B$, decimos que f mapea o aplica A sobre B. (Se utiliza la palabra sobre, admitiendo para ella un significado más específico que el de en).*
Si $E \subset B, f^{-1}(E)$ representa el conjunto de todo $x \in A$ tal que $f(x) \in E$. Llamamos a $f^{-1}(E)$ imagen inversa de E bajo f. Si $y \in B, f^{-1}(y)$ es el conjunto de todos los $x \in A$ tales que $f(x) = y$. Si, para cada $y \in B, f^{-1}(y)$ no está integrado por más de un elemento de A se dice que f es un mapeo 1-1 (uno a uno) de A en B. Esto puede expresarse también como sigue: f es un mapeo 1-1 de A en B cuando $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2; x_1 \in A; x_2 \in A$.

(La notación $x_1 \neq x_2$ significa que x_1 y x_2 son elementos diferentes; en otro caso, escribiremos $x_1 = x_2$).

Definición 2.3 *Si existe un mapeo 1-1 de A sobre B, decimos que A y B pueden ponerse en correspondencia 1-1, también llamada biunivoca, que A y B tienen el mismo número cardinal, o más brevemente, que A y B son equivalentes, y escribimos $A \sim B$. Esta relación tiene las propiedades siguientes, como se ve claramente:*

Es reflexiva: $A \sim A$.
Es simétrica: si $A \sim B$, *también* $B \sim A$.
Es transitiva: si $A \sim B$ *y* $B \sim C$, *también* $A \sim C$.
Toda relación con estas tres propiedades, se llama relación de equivalencia.

Definición 2.4 *Para todo entero positivo* n, *sea* J_n *el conjunto cuyos elementos son los números enteros* $1, 2, \ldots, n$, *y* J *el conjunto formado por todos los enteros positivos. Para todo conjunto* A, *decimos:*
(a) A *es finito si* $A \sim J_n$ *para algún* n *(el conjunto vacío se considera finito).*
(b) A *es infinito si no es finito.*
(c) A *es numerable si* $A \sim J$.
(d) A *es no numerable si no es ni finito ni numerable.*
(e) A *es a lo más numerable si es finito o numerable.*

Para dos conjuntos finitos A y B, evidentemente tenemos $A \sim B$ si, y solo si, A y B contienen el mismo número de elementos. Para los conjuntos infinitos, la idea «tener el mismo número de elementos» es vaga, mientras que la noción de correspondencia 1-1 conserva su claridad.

Ejemplo 2.1 *Sea* A *el conjunto de todos los números enteros.* A *es numerable. Para verlo, consideremos la disposición siguiente de los conjuntos* A *y* J *:*

$$\begin{array}{ll} A: & 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots \\ J: & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \end{array}$$

Podemos, en este ejemplo, dar una fórmula explícita para una función f *de* J *en* A *que establece una correspondencia 1-1:*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ par }) \\ -\frac{n-1}{2} & (n \text{ impar }). \end{cases}$$

Observación: *Un conjunto finito no puede ser equivalente a uno de sus subconjuntos propios. Sin embargo, esto es posible para conjuntos infinitos, según se ve en el ejercicio 2.1, en el que* J *es un subconjunto propio de* A.

De hecho, podemos sustituir la Definición 2.4(b) por la proposición: A *es infinito, si es equivalente a uno de sus subconjuntos propios.*

Definición 2.5 *Por sucesión entendemos una función* f *definida en el conjunto* J *de todos los enteros positivos. Si* $f(n) = x_n$, *para* $n \in J$, *se acostumbra a representar la sucesión* f *por el símbolo* $\{x_n\}$, *o a veces por* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *Los valores de* f, *esto es, los elementos* x_n, *se llaman términos de la sucesión. Si* A *es un conjunto y* $x_n \in A$ *para todo* $n \in J$, *se dice que* $\{x_n\}$ *es una sucesión en* A, *o una sucesión de elementos de* A.

Obsérvese que los términos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de una sucesión no necesitan ser distintos.

Como todo conjunto numerable es el rango de una función 1-1 definida en J, podemos considerar un

Versión en revisión

Versión en revisión

conjunto numerable como el rango de una sucesión de términos distintos. Hablando más libremente, podemos decir que los elementos de un conjunto numerable pueden ser «dispuestos en una sucesión».

A veces es conveniente sustituir J en esta definición por el conjunto de todos los enteros no negativos, esto es, comenzar con 0 en lugar de 1.

Teorema 2.1 *Todo subconjunto infinito de un conjunto numerable A, es numerable.*

Demostración: *Supongamos $E \subset A$ y que E es infinito. Dispongamos los elementos x de A en una sucesion $\{x_n\}$ de elementos distintos. Construyamos una sucesión $\{n_k\}$ como sigue:*

Sea n_1, el menor entero positivo tal que $x_{n_1} \in E$. Elegidos $n_1, \ldots, n_{k-1}(k = 2, 3, 4, \ldots)$, sean n_k el menor entero mayor que n_{k-1} y tal que $x_{n_k} \in E$.

Poniendo $f(k) = x_{n_k}(k = 1, 2, 3, \ldots)$ obtenemos una correspondencia $1-1$ entre E y J.

El teorema muestra que, hablando vulgarmente, los conjuntos numerables representan la «menor» infinidad; un conjunto que no es no numerable puede ser un subconjunto de uno numerable (No existe ningún conjunto no numerable que pueda ser un subconjunto de un conjunto numerable).

Definición 2.6 *Sean A y Ω dos conjuntos y supongamos que a cada elemento α de A hay asociado un subconjunto de Ω que representaremos por E_α. El conjunto cuyos elementos son los conjuntos E_α se representará por $\{E_\alpha\}$. En lugar de hablar de conjuntos de conjuntos, hablaremos a veces de una colección de conjuntos, o de una familia de conjuntos.*
Se define la unión de los conjuntos E_α como el conjunto S tal que $x \in S$ si, y solo si, $x \in E_\alpha$ para, al menos, un $\alpha \in A$. Usaremos la notación

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{2.1.1}$$

Si A está constituido por los enteros $1, 2, \ldots, n$ escribiremos

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \tag{2.1.2}$$

o

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n. \tag{2.1.3}$$

Si A es el conjunto de todos los enteros positivos, la notación usual es

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \tag{2.1.4}$$

El símbolo ∞ indica simplemente en (2.1.4), que se toma la unión de una colección numerable de conjuntos, y no debe confundirse con los símbolos $+\infty$ y $-\infty$.
Se define la intersección de los conjuntos E_α como el conjunto P tal que $x \in P$ si, y solo si, $x \in E_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Usaremos la notación

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha, \tag{2.1.5}$$

o

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n, \tag{2.1.6}$$

o

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m \tag{2.1.7}$$

como para las uniones. Si $A \cap B$ *no es vacío, decimos que* A *y* B *se intersecan; o de otro modo: son ajenos.*

Ejemplo 2.2

(a) Supongamos que E_1 *está constituido por 1, 2, 3, y* E_2 *por 2, 3, 4.* $E_1 \cup E_2$ *estará constituido por 1,2,3,4; mientras que* $E_1 \cap E_2$ *lo estará por 2, 3 .*

(b) Sea A *el conjunto de los números reales* x *tales que* $0 < x \leq 1$*. Para todo* $x \in A$*, sea* E_x *el conjunto de los números reales* y *tales que* $0 < y < x$*. Será*

$$E_x \subset E_z \text{ si, y solo si, } 0 < x \leq z \leq 1; \tag{i}$$

$$\bigcup_{x \in A} E_x = E_1 \tag{ii}$$

$$\bigcap_{x \in A} E_x \text{ es vacío;} \tag{iii}$$

(i) y (ii) son inmediatas. Para demostrar (iii), notemos que para todo $y > 0$*,* $y \notin E_x$ *si* $x < y$*. De aquí, que* $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$*.*

Observación: *Muchas propiedades de las uniones e intersecciones son completamente similares a las de las sumas y productos; a veces incluso se utilizan las palabras suma y producto y se escriben los símbolos* Σ *y* Π *en lugar de* $\cup$ *y* $\cap$*.*

Las leyes conmutativas y asociativa se ven inmediatamente:

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A. \tag{2.1.8}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \tag{2.1.9}$$

Así, la omisión de paréntesis en (2.1.3) *y* (2.1.6) *está justificada.*

También se conserva la ley distributiva:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{2.1.10}$$

Para demostrar esto, representemos el primer y segundo miembro de (2.1.10) *por* E *y* F*, respectivamente. Supongamos* $x \in E$*. Entonces;* $x \in A$ *y* $x \in B \cup C$*, esto es* $x \in B$ *o* $x \in C$ *(es posible que en ambos). Por tanto,* $x \in A \cap B$ *o* $x \in A \cap C$*, de modo que* $x \in F$*. Así pues,* $E \subset F$*.*

Continuando: supongamos que $x \in F$*. Entonces,* $x \in A \cap B$ *o* $x \in A \cap C$*. Esto es,* $x \in A$*, y* $x \in B \cup C$*. Por tanto,* $x \in A \cap (B \cup C)$*, de modo que* $F \subset E$*. De lo cual se deduce que* $F = E$*.*

Versión en revisión

Reseñemos algunas otras relaciones que pueden demostrarse fácilmente:

$$A \subset A \cup B, \tag{2.1.11}$$

$$A \cap B \subset A. \tag{2.1.12}$$

Si 0 representa un conjunto vacío, será

$$A \cup 0 = A, \quad A \cap 0 = 0. \tag{2.1.13}$$

Si $A \subset B$:

$$A \cup B = B, \quad A \cap B = A. \tag{2.1.14}$$

Teorema 2.2 *Sea* $\{E_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ *una sucesión de conjuntos numerables y hagamos*

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n. \tag{2.1.15}$$

S *es numerable.*
Demostración: *Dispongamus cada conjunto* E_n *en una sucesión* $\{x_{nk}\}$, *con* $k = 1, 2, 3, \ldots$ ***y*** *consideremos la disposición en cuadro infinito:*

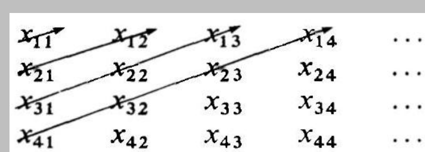

Figura 2.1: Ordenamiento.

en la que los, elementos de E_n *constituyen la fila n-ésima. El cuadro contiene todos los elementos de* S. *Estos elementos pueden disponerse en una sucesión como indican las flechas.*

$$x_{11}; x_{21}, x_{12}; x_{31}, x_{22}, x_{13}; x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}; \ldots \tag{2.1.16}$$

Si dos cualesquiera de estos conjuntos E_n *tienen elementos comunes, aparecerán más de una vez en* (2.1.16). *Por tanto, hay un subconjunto* T *del conjunto de todos los enteros positivos, tal que* $S \sim T$, *lo que demuestra que* S *es a lo sumo numerable (Teorema 2.1). Como* $E_1 \subset S$ *y* E_1 *es infinito,* S *es infinito y, por tanto, numerable.*

Corolario 2.1 *Supongamos que* A *es a lo sumo numerable, y para cada* $\alpha \in A$, B_α *es a lo sumo numerable. Hagamos*

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$$

T *será también a lo sumo numerable.*

Puesto que T es equivalente a un subconjunto de (2.1.15).

Versión en revisión

Teorema 2.3 *Sea A un conjunto numerable y B_n el conjunto de todas las n-tuplas $(a_1, \ldots, a_n)$, donde $a_k \in A(k = 1, \ldots n)$ sin que los elementos $a_1, \ldots, a_n$ necesiten ser distintos. B_n es numerable.*

Demostración: *Que B_1 es numerable es evidente, pues $B_1 = A$. Supongamos que B_{n-1} es numerable $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Los elementos de B_n son de la forma*

$$(b, a) \quad (b \in B_{n-1}, a \in A) \tag{2.1.17}$$

Para cada b dado, el conjunto de pares (b, a) es equivalente a A, y por tanto numerable. Así pues, B_n es la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables. Por el Teorema (2.2), B_n es numerable.

El teorema se demuestra por inducción.

Corolario 2.2 *El conjunto de todos los números racionales es numerable.*

Demostración: *Aplicaremos el Teorema (2.3), con $n = 2$, haciendo observar que todo número racional r es de la forma b/a, siendo a y b enteros. El conjunto de pares (a, b) y por tanto el de las fracciones b/a es numerable.*

De hecho, también es numerable el conjunto de todos los números algebraicos (ver Ejer. 2).

Que no todos los conjuntos infinitos son numerables, se ve en el siguiente teorema.

Teorema 2.4 *Sea A el conjunto de todas las sucesiones cuyos elementos son los dígitos 0 y 1. Este conjunto A, es no numerable,*
Los elementos de A se disponen en sucesión como sigue: $1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots$.

Demostración: *Sea E un subconjunto numerable de A y supongamos E constituido por las sucesiones $s_1, s_2, s_3, \ldots$ Construimos una sucesión s como sigue: si el dígito n-ésimo en s_n es 1 , hacemos que el n-ésimo de s sea 0 , y viceversa. La sucesión s difiere, pues, de cada elemento de E al menos en un lugar; por tanto, $s \notin E$. Pero es claro que $s \in A$, por lo cual E es un subconjunto propio de A.*

Hemos demostrado que todo subconjunto numerable de A es un subconjunto propio de A. Se deduce de aquí que A es no numerable (porque de otro modo A sería un subconjunto propio de A, lo que es absurdo).

La idea de la demostración anterior fue utilizada primeramente por Cantor y se llama proceso diagonal de Cantor, porque si las sucesiones $s_1, s_2, s_3, \ldots$ están colocadas en una disposición como en (2.1), los elementos de la diagonal son los que intervienen en la construcción de la nueva sucesión.

Los lectores que estén familiarizados con la representación binaria de los números reales (base 2 en lugar de 10) se darán cuenta de que el Teorema (2.4) implica que el conjunto de todos los números reales es no numerable. Daremos una segunda demostración de este hecho en el Teorema 2.23.

Versión en revisión

2.2 Espacios métricos

Definición 2.7 *Un conjunto X cuyos elementos llamaremos puntos, se dice que es un espacio métrico si a cada dos puntos p y q de X hay asociado un número real $d(p,q)$ llamado distancia de p a q, tal que*
(a) $d(p,q) > 0$ si $p \neq q; d(p,p) = 0$;
(b) $d(p,q) = d(q,p)$;
(c) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$, para todo $r \in X$.
Cualquier función con las tres propiedades anteriores se llama función distancia o métrica.

Ejemplo 2.3 *Los ejemplos más importantes de espacios métricos, desde nuestro punto de vista, son los espacios euclidianos $\mathbb{R}^k$, especialmente $\mathbb{R}^1$ (la recta real) y $\mathbb{R}^2$ (el plano complejo); la distancia en $\mathbb{R}^k$ se define por*

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \quad \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k\right). \tag{2.2.1}$$

Por el Teorema 1.12, las condiciones de la definición 2.7 quedan satisfechas por (2.2.1).

Es importante observar que todo subconjunto Y de un espacio métrico X, es a su vez un espacio métrico, con la misma función distancia; porque está claro que si se cumplen las condiciones (a) *a* (c) *de la Definición 2.7 para $p, q, r \in X$, también se cumplirán si imponemos a p, q, r la condición restrictiva de pertenecer a Y.*

Así pues, todo subconjunto de un espacio euclidiano, es un espacio métrico. Otros ejemplos son los espacios $\mathcal{C}(K)$ y $\mathcal{L}^2(\mu)$, que se tratan en los capítulos posteriores.

Definición 2.8 *Por segmento (a,b) queremos significar el conjunto de todos los números reales x tales que $a < x < b$.*
Por intervalo $[a,b]$ entendemos el conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$.
Ocasionalmente encontraremos «intervalos semi-abiertos» $[a,b)$ y $(a,b]$, el primero de los cuales está constituido por todo x tal que $a \leq x < b$, y el segundo por todo x para el cual $a < x \leq b$.
Si $a_i < b_i$ para $i = 1, \ldots, k$, el conjunto de todos los puntos, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ en $\mathbb{R}^k$, cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades $a_i \leq x_i \leq b_i (1 \leq i \leq k)$ se llama celda-k. Así, una celda-1 es un intervalo, una celda-2 un rectángulo, etc.
Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ y $r > 0$, se define la bola abierta (o cerrada) B con centro en $\boldsymbol{x}$ y radio r como el conjunto de todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ tal que $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < r$ (o $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \leq r$).
Llamaremos convexo a un conjunto $E \subset \mathbb{R}^k$, si

$$\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in E$$

cuando $\boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in E$ y $0 < \lambda < 1$.

Versión en revisión

Por ejemplo, las bolas son convexas. Porque si $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<r, |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|<r$, y $0<\lambda<1$. tenemos

$$\begin{aligned}|\lambda \boldsymbol{y}+(1-\lambda) \boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}| &= |\lambda(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+(1-\lambda)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})| \\ &\leq \lambda|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|+(1-\lambda)|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}|<\lambda r+(1-\lambda) r=r.\end{aligned}$$

La misma demostración se aplica a las bolas cerradas. Es también fácil de ver que las celdas-k son convexas.

Definición 2.9 *Sea X un espacio métrico. Se entiende que todos los puntos y conjuntos mencionados a continuación son elementos y subconjuntos de X.*
(a) Vecindad (o entorno) de un punto p es un conjunto $N_r(p)$ formado por todos los puntos q tales que $d(p,q)<r$. Al número r se le llama radio de $N_r(p)$.
(b) Un punto p es un punto límite del conjunto E si toda vecindad de p contiene un punto $q \neq p$ tal que $q \in E$.
(c) Si $p \in E$ y p no es un punto límite de E, a p se le llama punto aislado de E.
(d) E es cerrado si todos sus puntos límites pertenecen a él.
(e) Un punto p es interior a E si existe una vecindad N de p tal que $N \subset E$.
(f) E es abierto si todos sus puntos son interiores.
(g) El complemento de E (representado por E^c) es el conjunto de todos los puntos $p \in X$ tales que $p \notin E$.
(h) E es perfecto si es cerrado y todos sus puntos son puntos limites.
(i) E es acotado si hay un número real M y un punto $q \in X$ tales que $d(p,q)<M$ para todo $p \in E$.
(j) E es denso en X si todo punto de X es punto límite de E, o punto de E (o ambas cosas a la vez).

Observemos que en $\mathbb{R}^1$ las vecindades son segmentos, mientras que en $\mathbb{R}^2$ son círculos.

Teorema 2.5 *Toda vecindad es un conjunto abierto.*

Demostración: *Consideremos una vecindad $E=N_r(p)$, y sea q un punto cualquiera de E. Hay un número real positivo h, tal que*

$$d(p,q)=r-h$$

Para todo punto s para el cual $d(q,s)<h$ tendremos, pues

$$d(p,s) \leq d(p,q)+d(q,s)<r-h+h=r$$

de modo que $s \in E$. Así pues, q es un punto interior de E.

Teorema 2.6 *Si p es un punto límite de un conjunto E, toda vecindad de p contiene infinitos puntos de E.*

Demostración: *Supongamos que hay una vecindad N de p que solamente contiene un número finito de puntos de E. Sean $q_1, \ldots, q_n$ esos puntos de $N \cap E$ que son distintos de p, y hagamos*

$$r=\min_{1 \leq m \leq n} d\left(p, q_m\right)$$

[usaremos esta notación para expresar el menor de los números $d\left(p, q_1\right), \ldots, d\left(p, q_n\right)$]. El mínimo de un conjunto finito de números positivos es, evidentemente, positivo, de modo que $r>0$.

Versión en revisión

La vecindad $N_r(p)$ no contiene ningún punto q de E tal que $q \neq p$, de modo que p no es punto límite de E. Esta contradicción, demuestra el teorema.

Corolario 2.3 *Un conjunto finito de puntos no tiene puntos límites.*

Ejemplo 2.4 *Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:*

(a) El conjunto de todos los números complejos z tales que $|z| < 1$.

(b) El conjunto de todos los números complejos z tales que $|z| \leq 1$.

(c) Un conjunto finito.

(d) El conjunto de todos los enteros.

(e) El conjunto constituido por los números $1/n(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Notemos que este conjunto E tiene un punto límite (éste es, $z = 0$), pero ningún punto de E es punto límite de E, con lo que se ve la diferencia entre poseer un punto límite y contenerle.

(f) El conjunto de todos los números complejos (esto es, $\mathbb{R}^2$).

(g) El segmento (a, b).

Observemos que $(d), (e)$ y (g) pueden ser considerados también como subconjuntos de $\mathbb{R}^1$.

A continuación se expresan en una tabla algunas propiedades de estos conjuntos:

	Cerrado	Abierto	Perfecto	Acotado
(a)	No	Sí	No	Sí
(b)	Sí	No	Sí	Sí
(c)	Sí	No	No	Sí
(d)	Sí	No	No	No
(e)	No	No	No	Sí
(f)	Sí	Sí	Sí	No
(g)	No		No	Sí

En (g) hemos dejado la segunda columna en blanco. La razón es que el segmento (a, b) no es abierto si le consideramos como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, pero si es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^1$.

Teorema 2.7 *Sea $\{E_\alpha\}$ una colección (finita o infinita) de conjuntos E_α. Será:*

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha (E_\alpha^c)\,. \tag{2.2.2}$$

Demostración: *Sean A y B el primero y el segundo miembro de (2.2.2). Si $x \in A$, entonces $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$; por tanto $x \notin E_\alpha$ para cualquier α, y $x \in E_\alpha^c$ para todo α, de modo que $x \in \bigcap_\alpha E_\alpha^c$. Así pues, $A \subset B$.*

Versión en revisión

Inversamente, si $x \in B$, estará $x \in E_\alpha^c$ para todo α, y $x \notin E_\alpha$ para cualquier α, y de aquí $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$, de modo que $x \in (\bigcup_\alpha E_\alpha)^c$. Así pues, $B \subset A$.

Se deduce pues, que $A = B$.

Teorema 2.8 *Un conjunto E es abierto, si y solo si su complemento es cerrado.*

Demostración: *Supongamos, primeramente que E^c es cerrado, y elijamos un $x \in E$. En este caso, $x \notin E^c$ y x no es punto límite de E^c. Por tanto, existe una vecindad N de x tal que $E^c \cap N$ es vacío, esto es, $N \subset E$. Este x es un punto interior de E y E es abierto.*

Ahora, supongamos E abierto y sea x un punto límite de E^c. Cada vecindad de x contiene un punto de E^c, de modo que x no es punto interior de E. Como E es abierto, esto significa que $x \in E^c$, de donde se deduce que E^c es cerrado.

Corolario 2.4 *Un conjunto F es cerrado si, y solo si, su complemento es abierto.*

Teorema 2.9 *(a) Para toda colección $\{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos, $\bigcup_\alpha G_\alpha$ es abierto.*

(b) Para toda colección $\{F_\alpha\}$ de conjuntos cerrados, $\bigcap_\alpha F_\alpha$ es cerrado.

(c) Para toda colección finita $G_1, \ldots, G_n$ de conjuntos abiertos, $\bigcap_{i=1}^n G_i$ es abierto.

(d) Para toda colección finita $F_1, \ldots, F_n$ de conjuntos cerrados, $\bigcup_{i=1}^n F_i$ es cerrado.

Demostración: *Hagamos $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Si $x \in G$, tendremos que $x \in G_\alpha$ para algún α. Como x es un punto interior de G_α, es también un punto interior de G, y G es abierto, lo que demuestra (a).*

Por el Teorema 2.7,

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha (F_\alpha^c) \tag{2.2.3}$$

y F_α^c es abierto, por el Teorema 2.8. Por tanto (a) implica que (2.2.3) es abierto y, por tanto, $\bigcap_\alpha F_\alpha$ cerrado.

Ahora, hagamos $H = \bigcap_{i=1}^n G_i$. Para todo $x \in H$, existen vecindades N_i de x, con radios r_i, tales que $N_i \subset G_i (i = 1, \ldots, n)$. Hagamos

$$r = \min(r_1, \ldots, r_n)$$

y sea N la vecindad de x de radio r. Entonces, $N \subset G_i$ para $i = 1, \ldots, n$ de forma que $N \subset H$, y H es abierto.

Tomando complementos de (c) se deduce (d):

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n (F_i^c).$$

Ejemplo 2.5 *En los apartados (c) y (d) del teorema precedente es esencial el carácter finito de las colecciones. Para verlo, sea G_n el segmento $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) (n = 1, 2, 3, \ldots) : G_n$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^1$.*

Versión en revisión

Hagamos $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n; G$ *estará constituido por un solo punto (esto es,* $x = 0$ *) y no es, por consiguiente, un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^1$.

Así, pues, la intersección de una colección infinita de conjuntos abiertos no es necesariamente abierta. Del mismo modo, la unión de una colección infinita de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrada.

Definición 2.10 *Si* X *es un espacio métrico,* $E \subset X$ *y* E' *representa al conjunto de todos los puntos límite de* E *en* X*, entonces la cerradura de* E *es el conjunto* $\bar{E} = E \cup E'$.

Teorema 2.10 *Si* X *es un espacio métrico y* $E \subset X$*, entonces*
(a) $\bar{E}$ *es cerrado,*
(b) $E = \bar{E}$ *si, y solo si,* E *es cerrado,*
(c) $\bar{E} \subset F$ *para cada conjunto cerrado* $F \subset X$ *tal que* $E \subset F$.
De (a) y (c) es fácil ver que $\bar{E}$ *es el subconjunto cerrado más pequeño de* X *que contiene* E.

Demostración: *(a) Si* $p \in X$ *y* $p \notin \bar{E}$*, entonces* p *no es punto de* E *ni tampoco punto limite de* E*. Por consiguiente,* p *tiene una vecindad que no intersecta* E*. Por tanto el complemento de* $\bar{E}$ *es abierto. De aquí que* $\bar{E}$ *es cerrado.*

(b) Si $E = \bar{E}$*, (a) implica que* E *es cerrado. Si* E *es cerrado, entonces* $E' \subset E$ *[por las Definiciones 2.9(d) y 2.10]; por lo tanto* $\bar{E} = E$.

(c) Si F *es cerrado y* $F \supset E$*, entonces* $F \supset F'$*, de aquí que* $F \supset E'$*. Esto es* $F \supset \bar{E}$.

Teorema 2.11 *Sea* E *un conjunto de números reales acotado superiormente y que no es vacío. Si* $y = \sup E$*. Entonces* $y \in \bar{E}$*. Por consiguiente* $y \in E$ *si* E *es cerrado.*

Compárese esto con los ejemplos de la sección **??**.

Demostración: *Si* $y \in E$*, entonces* $y \in \bar{E}$*. Supóngase que* $y \notin E$*. Entonces para cada* $h > 0$ *existe un punto* $x \in E$ *tal que* $y - h < x < y$*, porque de otra forma* $y - h$ *sería una cota superior de* E*. De aquí que* y *es un punto límite de* E*. Por consiguiente,* $y \in \bar{E}$.

Observación: *Supongamos* $E \subset Y \subset X$*, siendo* X *un espacio métrico. Decir que* E *es un subconjunto abierto de* X *significa que a cada punto* $p \in E$ *hay asociado un número positivo* r*, tal que las condiciones* $d(p,q) < r$ *y* $q \in X$ *implica que* $q \in E$*. Pero hemos visto anteriormente (Sec. 2.16) que* Y *es también un espacio métrico, por lo que nuestras definiciones se pueden hacer igual con* Y*. Para ser más explícitos, diremos que* E *es abierto relativo en* Y *si a cada* $p \in E$ *hay asociado un* $r > 0$*, tal que* $q \in E$ *cuando* $d(p,q) < r$ *y* $q \in Y$*. El ejemplo 2.4(g) mostró que un conjunto puede ser abierto relativo en* Y *sin ser un subconjunto abierto de* X*. Sin embargo, hay una relación sencilla entre estos conceptos, que estableceremos ahora.*

Teorema 2.12 *Supongamos* $Y \subset X$*. Un subconjunto* E *de* Y *es abierto relativo en* Y *si, y solo si* $E = Y \cap G$ *para algún subconjunto abierto* G *de* X.

Demostración: *Supongamos que* E *es abierto relativo en* Y*. Para cada* $p \in E$ *hay un número positivo* r_p*, tal que las condiciones* $d(p,q) < r_p$ *y* $q \in Y$ *implican que* $q \in E$*. Sea* V_p *el conjunto de todos los*

$q \in X$, tales que $d(p,q) < r_p$ y definamos

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p.$$

Por los Teoremas 2.5 y 2.9, G será un subconjunto abierto de X.

Como $p \in V_p$ para todo $p \in E$, es claro que $E \subset G \cap Y$.

Por nuestra elección de V_p, tenemos que $V_p \cap Y \subset E$ para todo $p \in E$, de modo que $G \cap Y \subset E$. Así pues, $E = G \cap Y$, con lo que queda demostrada la mitad del teorema.

Inversamente, si G es abierto en X y $E = G \cap Y$, todo $p \in E$ tiene una vecindad $V_p \subset G$. Por tanto, $V_p \cap Y \subset E$, de modo que E es abierto relativo en Y.

2.3 Conjuntos compactos

Definición 2.11 *Llamaremos cubierta abierta de un conjunto E en un espacio métrico X a la colección $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de X, tales que $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.*

Definición 2.12 *Se dice que un subconjunto K de un espacio métrico X es compacto si toda cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita.*
Más explícitamente, la condición es que si $\{G_\alpha\}$ es una cubierta abierta de K, hay un número finito de índices $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, tales que

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}.$$

La noción de compacticidad es de gran importancia en análisis, especialmente en relación con la continuidad. (Cap. **??**).

Se ve claramente que todo conjunto finito es compacto. La existencia de una extensa clase de conjuntos compactos infinitos en $\mathbb{R}^k$, se deduce del Teorema 2.21.

Ya hemos observado (en la Sec. **??**) que si $E \subset Y \subset X, E$ puede ser abierto relativo en Y, sin ser abierto relativo en X. La propiedad de ser abierto depende, pues, del espacio en el que está sumergido E. Igualmente es cierto para la propiedad de ser cerrado.

Sin embargo, es más fácil utilizar la compacticidad, del modo que vamos a ver. Para formular el próximo teorema, diremos provisionalmente, que K es compacto relativo en X si se cumplen las condiciones de la Definición 2.12.

Teorema 2.13 *Supongamos $K \subset Y \subset X$. K es compacto relativo en X si, y solo si K es compacto relativo en Y.*

En virtud de este teorema podemos, en muchos casos, considerar conjuntos compactos como espacios métricos en sí mismos, sin prestar atención al espacio que los contiene. En particular, aunque tiene escaso sentido hablar de espacios abiertos o cerrados (todo espacio métrico X es un subconjunto abierto de sí mismo, así como también un subconjunto cerrado de sí mismo), tendrá sentido hablar de espacios

Versión en revisión

métricos compactos.

Demostración: *Supongamos K compacto relativo en X, y sea $\{V_\alpha\}$ una colección de conjuntos, abierta relativa en Y, tal que $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. Por el Teorema 2.12, existen conjuntos G_α, abiertos relativos en X, tales que $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$, para todo α; y como K es compacto relativo en X, tendremos:*

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n} \tag{2.3.1}$$

para cierta elección de un número finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Como $K \subset Y$ (2.3.1) implica que

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}. \tag{2.3.2}$$

Lo que demuestra que K es compacto relativo en Y.

Inversamente, supongamos que K es compacto relativo en Y y sea $\{G_\alpha\}$ una colección de subconjuntos abiertos de X que cubre a K. Hagamos $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$, luego (2.3.2) se cumplirá para cierta elección de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, y como $V_\alpha \subset G_\alpha$, (2.3.2) implica (2.3.1); lo que completa la demostración.

Teorema 2.14 *Los subconjuntos compactos de espacios métricos, son cerrados.*

Demostración: *Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico X. Demostraremos que el complemento de K es un subconjunto abierto de X.*

Supongamos $p \in X$ y $p \notin K$. Si $q \in K$, sean V_q y W_q vecindades de p y q, respectivamente, de radios menores que $\frac{1}{2}d(p,q)$ [ver la Definición 2.9(a)]. Como K es compacto, hay un número finito de puntos $q_1, \ldots, q_n$ en K, tales que

$$K \subset W_{q_1} \cup \cdots \cup W_{q_n} = W.$$

Si $V = V_{q_1} \cap \cdots \cap V_{q_n}$, V es una vecindad de p que no interseca a W. Por tanto, $V \subset K^c$, de modo que p es un punto interior de K^c; de donde se deduce el teorema.

Teorema 2.15 *Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos, son compactos.*

Demostración: *Supongamos $F \subset K \subset X$, F cerrado (relativo en X) y K compacto. Sea $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta de F. Si se añade F^c a $\{V_\alpha\}$, se obtiene una cubierta abierta Ω de K. Como K es compacto, hay una subcolección finita Φ de Ω que cubre a K y, por tanto, a F. Si F^c es un elemento de Φ, podemos sacarle de Φ, quedando aun una cubierta abierta de F. Hemos demostrado así que una subcolección finita de $\{V_\alpha\}$ cubre a F.*

Corolario 2.5 *Si F es cerrado y K compacto, $F \cap K$ es compacto*

Demostración: *Los Teoremas 2.9(b) y 2.14, demuestran que $F \cap K$ es cerrado; como $F \cap K \subset K$, el teorema 2.15 demuestra que $F \cap K$ es compacto.*

Teorema 2.16 *Si $\{K_\alpha\}$ es una colección de subconjuntos compactos de un espacio métrico X, tal que la intersección de toda subcolección finita de $\{K_\alpha\}$ es no vacía, $\bigcap K_\alpha$ es no vacía.*

Demostración: *Tomemos un elemento K_1 de $\{K_\alpha\}$ y hagamos $G_\alpha = K_\alpha^c$. Admitamos que ningún punto de K_1 pertenece a todos los K_α. En estas condiciones, los conjuntos G_α forman una cubierta*

Versión en revisión

abierta de K_1, y como K_1 es compacto, hay un número finito de índices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tal que $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$. Pero esto significa que

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_n}$$

es vacío, en contra de la hipótesis.

Corolario 2.6 *Si $\{K_n\}$ es una sucesión de conjuntos compactos no vacíos, tales que $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\bigcap_1^\infty K_n$ es no vacío.*

Teorema 2.17 *Si E es un subconjunto infinito de un conjunto compacto K, E tiene un punto límite en K.*

Demostración: *Si ningún punto de K fuera punto límite de E, todo $q \in K$ tendría una vecindad V_q que contendría a lo más un punto de E (esto es, q si $q \in E$). Está claro que ninguna subcolección finita de $\{V_q\}$ puede cubrir a E; y lo mismo sucede con K, luego $E \subset K$, lo que contradice la compacticidad de K.*

Teorema 2.18 *Si $\{I_n\}$ es una sucesión de intervalos en $\mathbb{R}^1$, tal que $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\bigcap_1^\infty I_n$ es no vacía.*

Demostración: *Si $I_n = [a_n, b_n]$, sea E el conjunto de todos los a_n. E será no vacío y acotado superiormente (por b_1). Sea x el sup de E. Si m y n son enteros positivos:*

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m,$$

de modo que $x \leq b_m$ para todo m. Como es obvio que $a_m \leq x$, vemos que $x \in I_m$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$

Teorema 2.19 *Sea k un entero positivo. Si $\{I_n\}$ es una sucesión de k-celdas, tales que $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\bigcap_1^\infty I_n$ es no vacio.*

Demostración: *Supongamos que I_n consta de todos los puntos $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, tales que*

$$a_{n,j} \leq x_j \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

y hagamos $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$. Para cada j, la sucesión $\{I_{n,j}\}$ satisface la hipótesis del Teorema 2.18. Por tanto, existen números reales $x_j^*(1 \leq j \leq k$), para los cuales

$$a_{n,j} \leq x_j^* \leq b_{n,j} \quad (1 \leq j \leq k; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Llamando $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$, vemos que $\boldsymbol{x}^* \in I_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ de lo que se deduce el teorema.

Teorema 2.20 *Toda celda-k es compacta.*

Demostración: *Sea I, una celda-k constituida por todos los puntos $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, tales que $a_j \leq x_j \leq b_j (1 \leq j \leq k)$. Hagamos*

$$\delta = \left\{ \sum_1^k (b_j - a_j)^2 \right\}^{1/2}$$

Versión en revisión

Será $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leq \delta$, *si* $\boldsymbol{x} \in I$, *e* $\boldsymbol{y} \in I$.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que existe una cubierta abierta $\{G_\alpha\}$ *de* I *que no contiene ninguna subcubierta finita de* I. *Hagamos* $c_j = (a_j + b_j)/2$. *Los intervalos* $[a_j, c_j]$ *y* $[c_j, b_j]$ *determinarán* 2^k *celdas-k* Q_i, *cuya unión es* I. *Al menos uno de estos conjuntos* Q_i, *que llamamos* I_1, *no puede ser cubierto por ninguna subcolección finita de* $\{G_\alpha\}$ *(de otro modo* I *podría ser así cubierto). A continuación, dividiremos* I_1 *y continuaremos el proceso, obteniendo así una sucesión* $\{I_n\}$ *con las siguientes propiedades*

(a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$;

(b) I_n *no es cubierto por ninguna subcolección finita de* $\{G_\alpha\}$.

(c) Si $\boldsymbol{x} \in I_n$ *y* $\boldsymbol{y} \in I_n$, *luego* $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leq 2^{-n}\delta$.

Por (a) y el Teorema 2.19, hay un punto $\boldsymbol{x}^*$ *que pertenece a todo* I_n. *Para algún* $\alpha, \boldsymbol{x}^* \in G_\alpha$. *Como* G_α *es abierto, existe un* $r > 0$, *tal que* $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^*| < r$ *implica que* $\boldsymbol{y} \in G_\alpha$. *Si* n *es tan grande que* $2^{-n}\delta < r$ *(tal* n *existe, porque de otro modo sería* $2^n \leq \delta/r$ *para todo entero positivo* n, *lo que es absurdo) porque* $\mathbb{R}$ *es arquimediano, luego (c) implica que* $I_n \subset G_\alpha$, *lo que está en contradicción con (b), quedando completa la demostración.*

La equivalencia de (a) y (b) del próximo teorema, se conoce por teorema de Heine-Borel.

Teorema 2.21 *Si un conjunto* E *en* $\mathbb{R}^k$ *tiene una de las tres propiedades siguientes, tiene también las otras dos.*
(a) E *es cerrado y acotado*
(b) E *es compacto,*
(c) Todo subconjunto infinito de E *tiene un punto límite en* E.

Demostración: *Si se cumple (a)* $E \subset I$ *para alguna celda-k* I *y se deduce (b) de los Teoremas 2.20 y 2.15. El Teorema 2.17 demuestra que (b) implica (c). Queda por demostrar que (c) implica (a).*

Si E *no es acotado, luego* E *contiene puntos* $\boldsymbol{x}_n$ *con*

$$|\boldsymbol{x}_n| > n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

El conjunto S *constituido por estos puntos* $\boldsymbol{x}_n$ *es infinito y se ve inmediatamente que no tiene ningún punto de límite en* $\mathbb{R}^k$ *y, por tanto, en* E, *por lo que (c) tiene como consecuencia que* E *es acotado.*

Si E *no es cerrado, hay un punto* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ *que es punto límite de* E, *pero no pertenece a* E. *Para* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *existen puntos* $\boldsymbol{x}_n \in E$, *tales que* $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0| < 1/n$. *Sea* S *el conjunto de estos puntos* $\boldsymbol{x}_n$: S *será infinito (de otro modo* $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0|$ *tendría un valor positivo constante para infinitos* n *) y tiene a* $\boldsymbol{x}_0$ *como punto límite y no tiene ningún otro en* $\mathbb{R}^k$, *porque si* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$ *y* $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}_0$ *sería*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}| &\geq |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}| - |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0| \\ &\geq |\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}| \end{aligned}$$

para todos los valores de n, *excepto un número finito de ellos, lo que demuestra que* y *no es punto límite de* S *(Teorema 2.6).*

Por tanto, S *no tiene puntos límite en* E; *por lo que* E *debe ser cerrado si se cumple (c).*

Versión en revisión

Debemos hacer notar, en este punto, que (b) y (c) son equivalentes en todo espacio métrico (Ejer. 26), pero que (a), en general, no implica (b) y (c). Se dan ejemplos en el Ejercicio 16 y en el espacio $\mathcal{L}^2$, tratado en el capítulo **??**.

Teorema 2.22 (Weierstrass) *Todo subconjunto infinito acotado de $\mathbb{R}^k$ tiene un punto límite en $\mathbb{R}^k$.*

Demostración: *Por ser acotado, el conjunto E en cuestión es un subconjunto de una celda-k $I \subset \mathbb{R}^k$. Por el Teorema 2.20, I es compacto; y, por tanto, E tiene un punto límite en I, por Teorema 2.17.*

2.4 Conjuntos perfectos

Teorema 2.23 *Sea P un conjunto perfecto no vacío en $\mathbb{R}^k$. P es no numerable.*

Demostración: *Como P tiene puntos límite, debe ser infinito. Supongámosle numerable y representemos sus puntos por $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \ldots$ Construiremos una sucesión $\{V_n\}$ de vecindades, como sigue:*

Sea V_1 una vecindad de $\boldsymbol{x}_1$. Si V_1 contiene a todo $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k$, tal que $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_1| < r$, se define la cerradura $\bar{V}_1$ correspondiente, como el conjunto de todos los $\boldsymbol{y} \in R^k$, tales que $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_1| \leq r$.

Supongamos que se ha construido V_n de modo que $V_n \cap P$ es no vacío. Como todo punto de P es punto límite de P, hay una vecindad V_{n+1}, tal que (i) $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$; (ii) $\boldsymbol{x}_n \notin \bar{V}_{n+1}$; (iii) $V_{n+1} \cap P$ es no vacío. Por (iii), V_{n+1} satisface nuestras hipotesis inductivas y puede realizarse la construcción.

Hagamos $K_n = \bar{V}_n \cap P$. Como $\bar{V}_n$ es cerrado y acotado, $\bar{V}_n$ es compacto. Como $\boldsymbol{x}_n \notin K_{n+1}$ ningún punto de P pertenece a $\bigcap_1^\infty K_n$. Como $K_n \subset P$, esto significa que $\bigcap_1^\infty K_n$ es vacío. Pero todo K_n es no vacío por (iii) y $\boldsymbol{K}_n \supset \boldsymbol{K}_{n+1}$ por (i), lo que contradice al corolario del Teorema 2.16.

Corolario 2.7 *Todo intervalo $[a, b] (a < b)$ es no numerable. En particular, el conjunto de todos los números reales es no numerable.*

2.4.1 El conjunto de Cantor

El conjunto que vamos a construir, ahora demuestra que existen conjuntos perfectos en $\mathbb{R}^1$ que no contienen ningún segmento.

Sea E_0 el intervalo [0,1]. Separemos el segmento $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, y sea E_1 la reunión de los intervalos

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Separemos los tercios centrales de estos intervalos, y sea E_2 la unión de los intervalos

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Continuando de este modo, obtenemos una sucesión de conjuntos compactos E_n, tales que

Versión en revisión

(a) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$;

(b) E_n es la unión de 2^n intervalos, cada uno de longitud 3^{-n}.

El conjunto

$$P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

se llama conjunto de Cantor. P es, evidentemente, compacto y el Teorema 2.16 demuestra que es no vacío.

Ningún segmento de la forma

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right) \tag{2.4.1}$$

donde k y m son enteros positivos, tiene un punto común con P. Como todo segmento (α, β) contiene a un segmento de la forma (2.4.1), si

$$3^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{6}$$

P no contiene a ningún segmento.

Para demostrar que P es perfecto basta hacer ver que no contiene ningún punto aislado. Sea $x \in P$ y S un segmento que contiene a x. Sea I_n el intervalo de E_n que contiene a x. Elijamos n suficientemente grande para que $I_n \subset S$ y sea x_n un extremo de I_n tal que $x_n \neq x$.

De la construcción de P se deduce que $x_n \in P$, por lo que x es un punto límite de P y éste es perfecto.

Una de las propiedades más interesantes del conjunto de Cantor es que nos proporciona un ejemplo de conjunto no numerable de medida cero (el concepto de medida, se estudiará en el Cap. **??**).

2.5 Conjuntos conexos

Definición 2.13 *Dos subconjuntos A y B de un espacio métrico X se dice que son separados si $A \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cap B$ son vacíos, es decir, si ningún punto de A pertenece a la cerradura de B y ningún punto de B pertenece a la cerradura de A.*
Un conjunto $E \subset X$ se dice que es conexo si E no es la unión de dos conjuntos separados que no son vacíos.

Observación: *Es obvio que los conjuntos separados son ajenos, pero los conjuntos ajenos no necesariamente son separados. Por ejemplo, el intervalo $[0,1]$ y el segmento $(1,2)$ no son separados, debido a que 1 es un punto límite de $(1,2)$. No obstante, los segmentos $(0,1)$ y $(1,2)$ son separados.*

Los subconjuntos conexos de la recta real tienen una estructura particularmente sencilla:

Teorema 2.24 *Un subconjunto E de la recta real $\mathbb{R}^1$ es conexo si, y solamente si tiene la siguiente propiedad: Si $x \in E$, $y \in E$, y $x < z < y$, entonces $z \in E$.*

Versión en revisión

Demostración: *Si existe $x \in E, y \in E$, y algún $z \in (x,y)$ tal que $z \notin E$, entonces $E = A_z \cup B_z$ donde*

$$A_z = E \cap (-\infty, z), \quad B_z = E \cap (z, +\infty).$$

Como $x \in A_z$ y $y \in B_z, A$ y B no son vacíos. Ya que $A_z \subset (-\infty, z)$ y $B_z \subset (z, +\infty)$, estos son separados. De aquí E no es conexo.

De manera inversa, supóngase que E no es conexo. Entonces hay conjuntos A y B separados que no son vacíos tales que $A \cup B = E$. Si se toman $x \in A, y \in B$, y se supone (sin perder generalidad) que $x < y$. Se define ahora

$$z = \sup(A \cap [x, y]).$$

Por el Teorema 2.11, $z \in \bar{A}$; de aquí que $z \notin B$. En particular, $x \leq z < y$.
Si $z \notin A$, se deduce que $x < z < y$ y $z \notin E$.
Si $z \in A$, entonces $z \notin \bar{B}$, en consecuencia existe z_1 tal que $z < z_1 < y$ y $z_1 \notin B$. Por lo tanto, $x < z_1 < y$ y $z_1 \notin E$.

2.6 Ejericios

1. Demostrar que el conjunto vacío es un subconjunto de cada conjunto.

2. Se dice que un número complejo z es algebraico si hay enteros $a_0, \ldots, a_n$, que no son todos cero, tales que
$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$
Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable. Sugerencia: Para cada entero positivo N hay solo un número finito de ecuaciones con
$$n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = N.$$

3. Demostrar que existen números reales que no son algebraicos.

4. ¿Es numerable el conjunto de todos los números reales irracionales?

5. Construir un conjunto acotado de números reales que tenga exactamente tres puntos limites.

6. Si E' es el conjunto de todos los puntos límite de un conjunto E. Demostrar que E' es cerrado. Demostrar también que E y $\bar{E}$ tienen los mismos puntos límite. (Recordar que $\bar{E} = E \cup E'$.) ¿Siempre tienen E y E' los mismos puntos límite?

7. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots$ subconjuntos de un espacio métrico.
   (a) Si $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, demostrar que $\bar{B}_n = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.
   (b) Si $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, demostrar que $\bar{B} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$.
   Mostrar, con un ejemplo, que esta inclusión puede ser propia.

8. ¿Es cada punto de cada conjunto abierto $E \subset \mathbb{R}^2$ un punto límite de E? Responder la misma pregunta para conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^2$.

Versión en revisión

9. Sea E° el conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto E. [Véase la Definición 2.9(e); a E° se le denomina el interior de E.]

   (a) Demostrar que E° es siempre abierto.

   (b) Demostrar que E es abierto si y solo si, $E^\circ = E$.

   (c) Si $G \subset E$ y G es abierto, demostrar que $G \subset E^\circ$.

   (d) Demostrar que el complemento de E° es la cerradura del complemento de E.

   (e) ¿Tienen siempre E y $\bar{E}$ los mismos interiores?

   (f) ¿Tienen siempre E y E° las mismas cerraduras?

10. Sea X un conjunto infinito. Si para $p \in X$ y $q \in X$ se define

$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & (\text{si}\, p \neq q) \\ 0 & (\text{si}\, p = q) \end{cases}$$

   Demostrar que esto es una métrica. ¿Cuáles subconjuntos del espacio métrico resultante son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? ¿Cuáles son compactos?

11. Si para $x \in \mathbb{R}^1$ y $y \in \mathbb{R}^1$ se define

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= (x-y)^2, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{|x-y|}, \\ d_3(x,y) &= \left|x^2 - y^2\right|, \\ d_4(x,y) &= |x - 2y|, \\ d_5(x,y) &= \frac{|x-y|}{1+|x-y|}. \end{aligned}$$

   Determinar cuales de éstas son métricas.

12. Si $K \subset \mathbb{R}^1$ consta de 0 y los números $1/n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Demostrar que K es compacto, directamente de la definición (sin usar el teorema de Heine-Borel).

13. Construir un conjunto de números reales compacto en el cual sus puntos límites formen un conjunto numerable.

14. Dar un ejemplo de una cubierta abierta del segmento $(0, 1)$ que no tenga una subcubierta finita.

15. Mostrar que el Teorema 2.16 y su Corolario son falsos (en $\mathbb{R}^1$, por ejemplo) si se reemplaza la palabra “compacto” por “cerrado” o por “acotado”.

16. Considerar al conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, como un espacio métrico con $d(p,q) = |p-q|$. Sea E el conjunto de todos los $p \in \mathbb{Q}$ tales que $2 < p^2 < 3$. Mostrar que E es cerrado y acotado en $\mathbb{Q}$, pero que E no es compacto. ¿Es E abierto en $\mathbb{Q}$?

17. Si E es el conjunto de todos los $x \in [0, 1]$ cuya expansión decimal contiene únicamente a los dígitos 4 y 7. ¿Es numerable E? ¿Es denso E en $[0, 1]$? ¿Es E compacto? ¿Es E perfecto?.

18. ¿Existe un conjunto perfecto que no es vacío en $\mathbb{R}^1$ que no contiene ningún número racional?

Versión en revisión

19. (a) Si A y B son conjuntos cerrados ajenos en algún espacio métrico X, demostrar que son separados.

    (b) Demostrar lo mismo para conjuntos ajenos abiertos.

    (c) Si $p \in X, \delta > 0$ son fijos y se define A como el conjunto de todos los $q \in X$ para los cuales $d(p,q) < \delta$ y B se define de manera similar, con $>$ en lugar de $<$. Demostrar que A y B son separados.

    (d) Demostrar que cada espacio métrico conexo que tiene al menos dos puntos no es numerable. Sugerencia: Usar (c).

20. ¿Las cerraduras y los interiores de conjuntos conexos son siempre conexos? (Considérense los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.)

21. Sean A y B subconjuntos separados de algún $\mathbb{R}^k$, supóngase además que a $\in A$, $b \in \boldsymbol{B}$, y definase

$$\boldsymbol{p}(t) = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$$

    para $t \in \mathbb{R}^1$. Haciendo $A_0 = \boldsymbol{p}^{-1}(A), B_0 = \boldsymbol{p}^{-1}(B)$. [Entonces $t \in A_0$ si y solo si $\boldsymbol{p}(t) \in A$.

    (a) Demostrar que A_0 y B_0 son subconjuntos separados de $\mathbb{R}^1$.

    (b) Demostrar que existe un $t_0 \in (0,1)$ tal que $\boldsymbol{p}\,(t_0) \notin A \cup B$.

    (c) Demostrar que cada subconjunto convexo de $\mathbb{R}^k$ es conexo.

22. Se dice que un espacio métrico es separable si contiene un subconjunto denso numerable. Demostrar que $\mathbb{R}^k$ es separable. Sugerencia: Considerar el conjunto de los puntos que tienen coordenadas racionales.

23. Se dice que una colección $\{V_\alpha\}$ de subconjuntos abiertos de X es una base si se cumplen las condiciones siguientes: Para todo $x \in X$ y cada conjunto abierto $G \subset X$ tal que $x \in G$, tenemos que $x \in V_\alpha \subset G$ para algún α. En otras palabras, todo conjunto abierto en X, es la unión de una subcolección de $\{V_\alpha\}$.

    Demostrar que todo espacio métrico separable tiene una base numerable.

    Sugerencia: Tomar todas las vecindades con radio racional y centro en algún subconjunto denso numerable de X.

24. Sea X un espacio métrico en el cual cada subconjunto infinito tiene un punto limite. Demostrar que X es separable. Sugerencia. Fijar $\delta > 0$ y tomar $x_1 \in X$. Elegidos $x_1, \ldots, x_j \in X$, escoger $x_{j+1} \in X$, si es posible, de modo que $d\left(x_i, x_{j+1}\right) \geq \delta$ para $i = 1, \ldots, j$. Demostrar que este proceso ha de detenerse después de un número finito de pasos, y que, por tanto, X puede ser cubierto por un número finito de vecindades de radio δ. Tomar $\delta = 1/n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ y considerar los centros de las correspondientes vecindades.

25. Demostrar que cada espacio métrico K compacto tiene una base numerable, y que K es por lo tanto separable. Sugerencia: Para cada entero positivo n, hay un número finito de vecindades de radio $1/n$ cuya unión cubre a K.

Versión en revisión

26. Sea X un espacio metrico en el que cada subconjunto infinito tiene un punto límite. Demostrar que X es compacto. Sugerencia: Por los ejercicios 23 y 24, X tiene una base numerable. Se deduce que toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable $\{G_n\}, n = 1, 2, 3, \ldots$ Si ninguna subcolección finita de $\{G_n\}$ cubre a X, el complemento F_n de $G_1 \cup \ldots \cup G_n$ es no vacío para todo n, pero $\bigcap F_n$ es vacio. Si E es un conjunto que contiene un punto de cada F_n, considerar un punto límite de E y llegar a una contradicción.

27. Se dice que un punto p en un espacio métrico X es un punto de condensación de un conjunto $E \subset X$ si cada vecindad de p contiene un número de puntos de E que no es numerable.

    Suponer que $E \subset \mathbb{R}^k$ es no numerable, y sea P el conjunto de todos los puntos de condensación de E. Demostrar que P es perfecto y que a lo más un número de puntos numerable de E no está en P. En otras palabras, mostrar que $P^c \cap E$ es a lo más numerable. Sugerencia: Sea $\{V_n\}$ una base numerable de $\mathbb{R}^k, y$ W la unión de los V_n para los cuales $E \cap V_n$ es a lo más numerable, entonces muéstrese que $P = W^c$.

28. Demostrar que todo conjunto cerrado en un espacio métrico separable, es la unión de un conjunto (es posible que vacio) perfecto y un conjunto que es a lo sumo numerable. (Corolario: Todo conjunto cerrado numerable en $\mathbb{R}^k$ posee puntos aislados.) Sugerencia: Véase el Ejer. 27.

29. Demostrar que todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^1$ es la unión de una colección a lo sumo numerable de segmentos ajenos. Sugerencia: Utilizar el Ejer. 22.

30. Imitar la demostración del teorema 2.43 para llegar al resultado siguiente:

    Si $\mathbb{R}^k = \bigcup_1^\infty F_n$ donde cada F_n es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^k$, al menos uno de los F_n tiene un interior no vacio.

    Propiedad equivalente: Si G_n es un subconjunto abierto dentro de $\mathbb{R}^k$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, luego $\bigcap_1^\infty G_n$ es no vacio (de hecho, es denso en $\mathbb{R}^k$).

    (Es un caso particular del teorema de Baire; ver el Ejer. 22, Cap. 3, para el caso general.)

Versión en revisión