CAPÍTULO 5

Diferenciación

En este capítulo (excepto en la sección final) limitaremos nuestra atención a las funciones reales definidas en intervalos o segmentos, no solo por motivos de comodidad, sino porque cuando pasamos de las funciones reales a las de valores vectoriales, aparecen notables diferencias. La diferenciación de funciones definidas en $\mathbb{R}^k$ se tratará en el capítulo 9.

5.1 Derivada de una función real

Definición 5.1 *Supongamos f definida (y con valores reales) en $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$, formemos el cociente*

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (a < t < b, t \neq x) \tag{5.1.1}$$

y definamos

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) \tag{5.1.2}$$

con la condición de que exista este límite, de acuerdo con la Definición 4.1.

Así, asociamos a la función f una función f', cuyo dominio de definición es el conjunto de los puntos x en los que existe (5.1.2); a f' se le llama derivada de f.

Si f' está definida en un punto x, decimos que f es diferenciable en x.

Si f' está definida en todos los puntos de un conjunto $E \subset [a, b]$, decimos que f es diferenciable en E.

Es posible considerar en (5.1.2) límites por la derecha y por la izquierda; lo que conduce a la definición de derivadas por la derecha y por la izquierda. En particular, en los puntos límites a y b, la derivada será, si existe una derivada por la derecha, o por la izquierda, respectivamente. Sin embargo no estudiaremos este tipo de derivadas con detalle.

Si f está definida en un segmento (a, b) y $a < x < b$, $f'(x)$ está definida por las (5.1.1) y (5.1.2) anteriores, pero en este caso no están definidas $f'(a)$ y $f'(b)$.

Teorema 5.1 *Supongamos f definida en $[a, b]$. Si f es diferenciable en un punto $x \in [a, b]$, es continua en x.*

Demostración: *Cuando $t \to x$, por el Teorema 4.2, tenemos*

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot (t - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0.$$

El recíproco de este teorema no es cierto. Es fácil construir funciones continuas que dejan de ser diferenciables en puntos aislados. En el capítulo 7 incluso nos encontraremos con una función que es continua en toda la recta, sin ser diferenciable en ningún punto.

Teorema 5.2 *Supongamos que f y están definidas en $[a, b]$ y son diferenciables en un punto $x \in [a, b]$. $f + g$; fg, y f/g son diferenciables en x, y*

(a) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

(b) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$.

En (c) se supone, evidentemente, que $g(x) \neq 0$.

Demostración: *(a) se ve claramente por el Teorema 4.2. Sea $h = fg$. Será*

$$h(t) - h(x) = f(t)[g(t) - g(x)] + g(x)[f(t) - f(x)]$$

Si dividimos esta expresión por $t - x$ y observamos que $f(t) \to f(x)$ cuando $t \to x$ (Teorema 5.1), se deduce (b). Sea, ahora $h = f/g$. Será

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \frac{1}{g(t)g(x)} \left[g(x)\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x)\frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right].$$

Suponiendo que $t \to x$, y aplicando los Teoremas 4.2 y 5.1, obtenemos (c).

Ejemplo 5.1 *Se ve fácilmente que la derivada de una constante es cero. Si f está definida por $f(x) = x, f'(x) = 1$. Repitiendo la aplicación de (b) y (c) se ve que x^n es diferenciable, y que su derivada es nx^{n-1} para todo entero n (si $n < 0$ debemos limitarnos a $x \neq 0$). Así, todo polinomio es diferenciable, y lo mismo sucede con las funciones racionales, excepto en los puntos en que el denominador es cero.*

El teorema siguiente se conoce como «regla de la cadena» de la diferenciación. En el capítulo 9 encontraremos versiones más generales.

Teorema 5.3 *Supongamos que f es continua en $[a, b]$, existe $f'(x)$ en algún punto $x \in [a, b], g$ está definida en un intervalo I que contiene el rango de f, y g es diferenciable en el punto $f(x)$. Si*

$$h(t) = g(f(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

h es diferenciable en x, y

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{5.1.3}$$

Demostración: *Sea $y = f(x)$. Por la definición de derivada, tenemos*

$$f(t) - f(x) = (t - x)\left[f'(x) + u(t)\right] \tag{5.1.4}$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)\left[g'(y) + v(s)\right] \tag{5.1.5}$$

donde $t \in [a, b]$; $s \in I$, y $u(t) \to 0$ cuando $t \to x$, $v(s) \to 0$ si $s \to y$. Sea $s = f(t)$. Aplicando primeramente (5.1.5) y a continuación (5.1.4), obtenemos

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) \\ &= [f(t) - f(x)] \cdot \left[g'(y) + v(s)\right] \\ &= (t - x) \cdot \left[f'(x) + u(t)\right] \cdot \left[g'(y) + v(s)\right] \end{aligned}$$

o, si $t \neq x$,

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = \left[g'(y) + v(s)\right] \cdot \left[f'(x) + u(t)\right] \tag{5.1.6}$$

Haciendo que $t \neq x$, vemos que $s \to y$, por la continuidad de f, así que el segundo miembro de (5.1.6) tiende a $g'(y)f'(x)$, lo que da (5.1.3).

Ejemplo 5.2 *(a) Sea f, una función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases} \tag{5.1.7}$$

Admitiendo que la derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$ (estudiaremos las funciones trigonométricas en el Cap. 8), podenos aplicar los Teoremas 5.2 y 5.3 cuando $x \neq 0$, y obtendremos

$$f'(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \tag{5.1.8}$$

Para $x = 0$ estos teoremas no pueden aplicarse, pues, $1/x$ no está definido, y recurriremos directamente a la definición: para $t \neq 0$.

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \operatorname{sen} \frac{1}{t}$$

Para $t \to 0$, esta expresión no tiende a ningún límite, de modo que $f'(0)$ no existe.

(b) Supongamos f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \tag{5.1.9}$$

Como anteriormente, obtenemos

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \tag{5.1.10}$$

En $x = 0$, recurrimos a la definición, y obtenemos

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right| = \left|t \operatorname{sen}\frac{1}{t}\right| \leq |t| \quad (t \neq 0)$$

suponiendo $t \to 0$, vemos que

$$f'(0) = 0. \tag{5.1.11}$$

Así, pues, f es diferenciable en todos los puntos x, pero f' no es una función continua, pues, $\cos(1/x)$ *en* (5.1.10), *no tiende a un límite cuando $x \to 0$.*

5.2 Teoremas del valor medio

Definición 5.2 *Sea f una función real definida en un espacio métrico X. Decimos que f tiene un máximo local en un punto $p \in X$, si existe $\delta > 0$, tal que $f(q) \leq f(p)$ para todo $q \in X$, tal que $d(p,q) < \delta$.*

Del mismo modo se definen los mínimos locales.

El próximo teorema es la base de muchas aplicaciones de la diferenciación.

Teorema 5.4 *Supongamos f definida en $[a,b]$; si tiene un máximo local en un punto $x \in (a,b)$, y existe $f'(x)$, es $f'(x) = 0$.*

El enunciado análogo para los mínimos locales, es también cierto.

Demostración: *Elijamos δ de acuerdo con la Definición 5.2, de modo que*

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b$$

Si $x - \delta < t < x$, será

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq 0$$

Suponiendo $t \to x$, vemos que $f'(x) \geq 0$.

Si $x < t < x + \delta$, será

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq 0$$

lo que demuestra que $f'(x) \leq 0$. De aquí que $f'(x) = 0$.

Teorema 5.5 *Si f y g son funciones reales continuas en $[a,b]$ diferenciables en (a,b), existe un punto $x \in (a,b)$, en el cual*

$$[f(b)-f(a)]g'(x) = [g(b)-g(a)]f'(x)$$

Obsérvese que no es necesaria la diferenciabilidad en los extremos.

Demostración: *Hagamos*

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

h es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b) \tag{5.2.1}$$

Para demostrar el teorema, debemos ver que $h'(x) = 0$ para algún $x \in (a, b)$.

Si h es constante, se cumple para todo $x \in (a, b)$. Si $h(t) > h(a)$ para algún $t \in (a, b)$, sea x un punto de $[a, b]$ en el que h alcanza su máximo (Teorema 4.10). Por (5.2.1), $x \in (a, b)$ y el Teorema 5.4 demuestra que $h'(x) = 0$. Si $h(t) < h(a)$ para algún $t \in (a, b)$, se aplica el mismo argumento, eligiendo para x un punto de $[a, b]$ en el que h alcanza su mínimo.

A este teorema se le llama a veces teorema generalizado del valor medio; al siguiente caso especial suele llamársele «el» teorema del valor medio.

Teorema 5.6 *Si f es una función real continua en $[a, b]$, que es diferenciable en (a, b), existe un punto $x \in (a, b)$, en el cual*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x).$$

Demostración: *Hacer $g(x) = x$ en el Teorema 5.5.*

Teorema 5.7 *Suponiendo f diferenciable en (a, b).*
(a) Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es monótona creciente.
(b) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es constante.
(c) Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$, f es monótona decreciente.

Demostración: *Todas las conclusiones se pueden extraer de la ecuación*

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x),$$

que es válida para cada par de números x_1, x_2 de (a, b), para algún x entre x_1 y x_2.

5.3 Continuidad de las derivadas

Hemos visto [Ejemplo 5.2(b)] que una función f puede tener una derivada f', que existe en todo punto, pero es discontinua en alguno de ellos, pero no toda función es una derivada. En particular, las derivadas que existen en todos los puntos de un intervalo tienen una propiedad importante en común con las funciones continuas en un intervalo: adoptan los valores intermedios (compárese con el Teorema 4.15). El enunciado preciso es el siguiente:

Teorema 5.8 *Supongamas que f es una función real diferenciable en $[a, b]$ y que $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Existe un punto $x \in (a, b)$, tal que $f'(x) = \lambda$.*

Un resultado similar se cumple, evidentemente, si $f'(a) > f'(b)$.

Demostración: *Hágase* $g(t) = f(t) - \lambda t$. *Entonces* $g'(a) < 0$, *de manera que* $g(t_1) < g(a)$ *para algún* $t_1 \in (a, b)$, *y* $g'(b) > 0$, *así que* $g(t_2) < g(b)$ *para algún* $t_2 \in (a, b)$. *Por consiguiente,* g *alcanza su mínimo sobre* $[a, b]$ *(Teorema 4.10) en algún punto* x *tal que* $a < x < b$. *Entonces por el Teorema 5.4,* $g'(x) = 0$. *Es por esto que* $f'(x) = \lambda$.

Corolario 5.1 *Si* f *es diferenciable en* $[a, b]$, f' *no puede tener en* $[a, b]$ *ninguna discontinuidad simple.*

Pero f' puede muy bien tener discontinuidad de segunda clase.

5.4 Regla de L'Hopital

El siguiente teorema es útil, con frecuencia, para el cálculo de límites.

Teorema 5.9 *Supongamos que* f *y* g *son reales y diferenciables en* (a, b), *y* $g'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in (a, b)$, *donde* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. *Supongamos*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \text{ si } x \to a \tag{5.4.1}$$

Si

$$f(x) \to 0 \quad y \quad g(x) \to 0 \text{ cuando } x \to a, \tag{5.4.2}$$

o si

$$g(x) \to +\infty \text{ cuando } x \to a, \tag{5.4.3}$$

será

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \text{ cuando } x \to a. \tag{5.4.4}$$

Igualmente es cierto el enunciado análogo, si $x \to b$ o si $g(x) \to -\infty$ en (5.4.3)). Hacemos notar que utilizamos el concepto de límite en el sentido amplio de la Definición 4.10.

Demostración: *Consideramos primeramente el caso de ser* $-\infty \leq A < +\infty$. *Elijamos un número real* q, *tal que* $A < q$ *y un* r, *tal que* $A < r < q$. *Por* (5.4.1), *existe un punto* $c \in (a, b)$, *tal que* $a < x < c$ *implica*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r \tag{5.4.5}$$

Si $a < x < y < c$, *el Teorema 5.5 demuestra que hay un punto* $t \in (x, y)$, *tal que*

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r \tag{5.4.6}$$

Supongamos que se cumple (5.4.2). *Considerando en* (5.4.6) *que* $x \to a$, *vemos que*

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \quad (a < y < c). \tag{5.4.7}$$

Supongamos, ahora, que se cumple (5.4.3). *Conservando* y *fijo en* (5.4.6), *podemos elegir un punto* $c_i \in (a, y)$, *tal que* $g(x) > g(y)$ *y* $g(x) > 0$ *si* $a < x < c_1$. *Multiplicando* (5.4.6) *por* $[g(x) - g(y)]/g(x)$, *obtenemos*

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \quad (a < x < c_1) \tag{5.4.8}$$

Si suponemos que $x \to a$ *en* (5.4.8); (5.4.3) *demuestra que hay un punto* $c_2 \in (a, c_1)$, *tal que*

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \quad (a < x < c_2) \tag{5.4.9}$$

Resumiendo: (5.4.7) *y* (5.4.9) *demuestran que para cada* q, *sujeto solamente a la condición* $A < q$, *hay un punto* c_2, *tal que* $f(x)/g(x) < q$ *si* $a < x < c_2$.

Del mismo modo, si $-\infty < A \leq +\infty$, *y se elige* p, *de modo que* $p < A$,

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (a < x < c_3) \tag{5.4.10}$$

y de las dos afirmaciones, se deduce (5.4.4).

5.5 Derivadas de orden superior

Definición 5.3 *Si* f *tiene una derivada* f' *en un intervalo, y* f' *es a su vez diferenciable, representaremos su derivada por* f'' *y la llamaremos derivada segunda de* f. *Continuando de este modo, obtenemos funciones*

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}$$

cada una de las cuales es la derivada de la precedente. A $f^{(n)}$ *se le llama derivada* n*-ésima o de orden* n *de* f.

Para que $f^{(n)}(x)$ exista en un punto x, debe existir $f^{(n-1)}(t)$ en una vecindad de x (o en una vecindad hacia un lado, si x es un extremo del intervalo en el que está definida f) y debe ser diferenciable en x. Como ha de existir $f^{(n-1)}$ en una vecindad de x, $f^{(n-2)}$ debe ser diferenciable en esa vecindad.

5.6 Teorema de Taylor

Teorema 5.10 *Supongamos que* f *es una función real en* $[a, b], n$ *es un entero positivo,* $f^{(n-1)}$ *es continua en* $[a, b]$, *existe* $f^{(n)}(t)$ *para todo* $t \in (a, b)$. *Sean* α, β *puntos distintos de* $[a, b]$ *y definamos*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k \tag{5.6.1}$$

Existe un punto x *entre* α *y* β, *tal que*

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n \tag{5.6.2}$$

Para $n = 1$ este teorema es el del valor medio. En general, el teorema demuestra que se puede hallar f aproximada por medio de un polinomio de grado $n-1$; y (5.6.2) nos permite estimar el error, si conocemos las cotas en $\left|f^{(n)}(x)\right|$.

Demostración: *Sea M el número definido por*

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta-\alpha)^n \tag{5.6.3}$$

y hagamos

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t-\alpha)^n \quad (a \leq t \leq b). \tag{5.6.4}$$

Tenemos que demostrar que $n!M = f^{(n)}(x)$ para algún x entre α y β. Por (5.6.1) y (5.6.4)

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (a < t < b). \tag{5.6.5}$$

Por tanto, la demostración estará completa si podemos probar que $g^{(n)}(x) = 0$ para algún x entre α y β.

Como $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ para $k = 0, \ldots, n-1$, tenemos

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \cdots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0 \tag{5.6.6}$$

La elección de M demuestra que $g(\beta) = 0$, de modo que $g'(x_1) = 0$ para algún x_1 entre α y β, por el teorema del valor medio. Como $g'(\alpha) = 0$, deducimos del mismo modo que $g''(x_2) = 0$ para algún x_2 entre α y x_1. Después de n pasos, llegamos a la conclusión de que $g^{(n)}(x_n) = 0$ para algún x_n entre α y x_{n-1}, esto es, entre α y β.

5.7 Diferenciación de funciones vectoriales

Observación: *La Definición 5.1 se aplica sin ningún cambio a las funciones complejas f definidas en $[a, b]$ y los Teoremas 5.1 y 5.2, lo mismo que sus demostraciones permanecen válidos. Si f_1 y f_2 son las partes real e imaginaria de f, esto es si $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ para $a \leq t \leq b$, donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son reales, se ve fácilmente que*

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x) \tag{5.7.1}$$

además, f es diferenciable en x si, y solo si f_1 y f_2 son diferenciables en x.

Pasando a las funciones con valores vectoriales (o vectoriales simplemente) en general, esto es, a las funciones $\boldsymbol{f}$ que mapean $[a, b]$ en algún $\mathbb{R}^k$, también se puede aplicar la Definición 5.1 para definir $\boldsymbol{f}'(x)$. El término $\phi(t)$ de (5.1.1) es ahora, para cada t, un punto en $\mathbb{R}^k$ y en (5.1.2) se toma el límite respecto a la norma de $\mathbb{R}^k$. En otras palabras, $\boldsymbol{f}'(x)$ es el punto de $\mathbb{R}^k$ (si existe), para el cual

$$\lim_{t \to x} \left| \frac{\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(x)}{t - x} - \boldsymbol{f}'(x) \right| = 0 \tag{5.7.2}$$

y $\boldsymbol{f}'$ es también una función con valores en $\mathbb{R}^k$.

Si $f_1, \ldots, f_k$ son las componentes de $\boldsymbol{f}$, que se definieron en el Teorema 4.7, entonces

$$\boldsymbol{f}' = \left(f_1', \ldots, f_k'\right) \tag{5.7.3}$$

y $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en un punto $\boldsymbol{x}$ si, y solo si cada una de las funciones $f_1, \ldots, f_k$ es diferenciable en x.

El Teorema 5.1 es cierto, lo mismo que los 5.2(a) y (b), si se sustituye fg por el producto interno $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}$ (ver la Definición 4.2).

Sin embargo, respecto al teorema del valor medio y a una de sus consecuencias: la regla de L'Hopital, la situación cambia. Los dos siguientes ejemplos demostrarán que dejan de ser ciertos para las funciones con valores complejos.

Ejemplo 5.3 *Definamos, para x real*

$$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \tag{5.7.4}$$

*(La última expresión puede considerarse como definición de la exponencial compleja e^{ix}; véase en el Capítulo **??** un estudio completo de estas funciones). Será*

$$f(2\pi) - f(0) = 1 - 1 = 0, \tag{5.7.5}$$

pero

$$f'(x) = ie^{ix} \tag{5.7.6}$$

de modo que $|f'(x)| = 1$ para todo x real.

Así, pues, el Teorema 5.6 deja de ser cierto en este caso.

Ejemplo 5.4 *En el segmento $(0, 1)$ definamos $f(x) = x$, y*

$$g(x) = x + x^2 e^{i/x^2} \tag{5.7.7}$$

Como $\left|e^{it}\right| = 1$ para todo t real, vemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{5.7.8}$$

Ahora bién,

$$g'(x) = 1 + \left\{2x - \frac{2i}{x}\right\} e^{i/x^2} \quad (0 < x < 1) \tag{5.7.9}$$

de modo que

$$\left|g'(x)\right| \geq \left|2x - \frac{2i}{x}\right| - 1 \geq \frac{2}{x} - 1 \tag{5.7.10}$$

De aquí que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| = \frac{1}{|g'(x)|} \leq \frac{x}{2 - x} \tag{5.7.11}$$

y así

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0. \tag{5.7.12}$$

Por (5.7.8) y (5.7.12), no se cumple en este caso la regla de L'Hopital. Obsérvese también que $g'(x) \neq 0$ en $(0, 1)$, por (5.7.10).

Sin embargo, hay una consecuencia del teorema del valor medio, que para las aplicaciones es casi tan útil como el Teorema 5.6, y que sigue siendo verdad para las funciones vectoriales. Del Teorema 5.6 se deduce que

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{a<x<b} \left|f'(x)\right|. \tag{5.7.13}$$

Teorema 5.11 *Supóngase que $\boldsymbol{f}$ es una aplicación continua de $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$ y $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en (a,b). Entonces existe $x \in (a,b)$ tal que*

$$|\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a)| \leq (b-a) \left|\boldsymbol{f}'(x)\right|.$$

Demostración: *Haciendo $z = \boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a)$, y definiendo*

$$\varphi(t) = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{f}(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Entonces φ es una función continua de valores reales sobre $[a,b]$ que es diferenciable en (a,b). El teorema del valor medio muestra por lo tanto que

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(x) = (b-a)\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{f}'(x)$$

para algún $x \in (a,b)$. Por otro lado,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{f}(a) = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|^2.$$

La desigualdad de Schwarz produce ahora

$$|\boldsymbol{z}|^2 = (b-a)\left|\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{f}'(x)\right| \leq (b-a)|\boldsymbol{z}|\left|\boldsymbol{f}'(x)\right|.$$

Por consiguiente $|\boldsymbol{z}| \leq (b-a)\,|\boldsymbol{f}'(x)|$, que es la conclusión que se quería.

5.8 Ejercicios

1. Sea f definida para todo x real, y supóngase que

   $$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$$

   para todo x y y reales. Demostrar que f es constante.

2. Supóngase que $f'(x) > 0$ en (a,b). Demostrar que f es estrictamente creciente en (a,b), y sea g su función inversa. Demostrar que g es diferenciable, y además que

   $$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (a < x < b)$$

3. Supóngase que g es una función real sobre $\mathbb{R}^1$, con derivada acotada (es decir $|g'| \leq M$). Fíjese $\varepsilon > 0$, y defínase $f(x) = x + \varepsilon g(x)$. Demostrar que f es uno-a-uno si ε es suficientemente pequeño.

   (Puede determinarse un conjunto de valores admisibles de ε que depende sólo de M.)

4. Si
$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$$
donde $C_0, \ldots, C_n$ son constantes reales, demostrar que la ecuación
$$C_0 + C_1 x + \cdots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$$
tiene, al menos, una raiz real entre 0 y 1 .

5. Suponer f definida y diferenciable para todo $x > 0$, y $f'(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$. Hacer $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Demostrar que $g(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

6. Suponer que
   (a) f es continua para $x \geq 0$,
   (b) $f'(x)$ existe para $x > 0$,
   (c) $f(0) = 0$,
   (d) f' es monótona creciente.

   Hacer
$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$$
   y demostrar que g es monótona creciente.

7. Suponer que existen $f'(x)$ y $g'(x)$, $g'(x) \neq 0$ y $f(x) = g(x) = 0$. Demostrar que
$$\lim_{t \to x} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
(Esto se cumple también para funciones complejas.)

8. Suponer que f' es continua en $[a, b]$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que
$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$
siempre que $0 < |t - x| < \delta; a \leq x \leq b; a \leq t \leq b$. (Podría expresarse esto diciendo que f es uniformemente diferenciable en $[a, b]$ si f' es continua en $[a, b]$). ¿Se cumple esto también para las funciones vectoriales?

9. Sea f una función real continua sobre $\mathbb{R}^1$, de la cual se sabe que $f'(x)$ existe para todo $x \neq 0$ y que $f'(x) \to 3$ cuando $x \to 0$. ¿Puede deducirse que $f'(0)$ existe?

10. Supongamos que f y g son funciones complejas diferenciales en $(0, 1)$; $f(x) \to 0$; $g(x) \to 0$; $f'(x) \to A$; $g'(x) \to B$ cuando $x \to 0$, siendo A y B números complejos y $B \neq 0$. Demostrar que
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$
Comparar con el Ejercicio 5.4. Sugerencia:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{f(x)}{x} - A \right\} \cdot \frac{x}{g(x)} + A \cdot \frac{x}{g(x)}.$$
Aplicar el Teorema 5.9 a las partes real e imaginaria de $f(x)/x$ y $g(x)/x$.

11. Suponer que f está definida en una vecindad de x y que existe $f''(x)$. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x)$$

Demostrar con un ejemplo que puede existir el límite aún cuando no exista $f''(x)$. Sugerencia: Aplicar el Teorema 5.9.

12. Si $f(x) = |x|^3$, calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ para todo número real x, y demostrar que $f^{(3)}(0)$ no existe.

13. Supóngase que a y c son números reales, $c > 0$, y f está definida sobre $[-1,1]$ por medio de

$$f(:) = \begin{cases} x^a \operatorname{sen}(|x|^{-c}) & (\text{ si } x \neq 0) \\ 0 & (\text{ si } x = 0) \end{cases}$$

Demostrar lo siguiente:

(a) f es continua si, y solo si $a > 0$.

(b) $f'(0)$ existe si, y solo si $a > 1$.

(c) f' es acotada si, y solo si $a \geq 1 + c$.

(d) f' es continua si, y solo si $a > 1 + c$.

(e) $f''(0)$ existe si, y solo si $a > 2 + c$.

(f) f'' es acotada si, y solo si $a \geq 2 + 2c$.

(g) f'' es continua si, y solo si $a > 2 + 2c$.

14. Sea f una función real diferenciable definida en (a,b). Demostrar que f es convexa si, y solo si f' es monótona creciente. Supóngase enseguida que $f''(x)$ existe para cada $x \in (a,b)$, y demuestre que f es convexa si, y solo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$.

15. Supóngase que $a \in \mathbb{R}^1$, y que f es una función real diferenciable dos veces sobre $(a,+\infty)$, y M_0, M_1, M_2 son las minimas cotas superiores de $|f(x)|, |f'(x)|$, $|f''(x)|$, respectivamente, sobre (a,∞). Demostrar que

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2$$

Sugerencia: Si $h > 0$, el teorema de Taylor muestra que

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+2h) - f(x)] - hf''(\xi)$$

para algún $\xi \in (x, x+2h)$. En consecuencia

$$\left|f'(x)\right| \leq hM_2 + \frac{M_0}{h}.$$

Para mostrar que $M_1^2 = 4M_0M_2$ puede ocurrir en realidad, tómese $a = -1$, y definase

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & (-1 < x < 0) \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} & (0 \leq x < \infty) \end{cases}$$

y muéstrese que $M_0 = 1, M_1 = 4, M_2 = 4$.

¿Es también $M_1^2 \leq 4M_0M_2$ válido para funciones vectoriales?

16. Supóngase que f es doblemente diferenciable sobre $(0, \infty), f''$ es acotada sobre $(0, \infty)$, y que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Demostrar que $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$.

    Sugerencia: Hacer $a \to \infty$ en el Ejercicio 15.

17. Supóngase que f es una función real y tres veces diferenciable sobre $[-1, 1]$, tal que

    $$f(-1) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

    Demostrar que $f^{(3)}(x) \geq 3$ para algún $x \in (-1, 1)$.

    Nótese que la igualdad es válida para $\frac{1}{2}\left(x^3 + x^2\right)$.

    Sugerencia: Usar el Teorema 5.10, con $\alpha = 0$ y $\beta = \pm 1$, para mostrar que existen $s \in (0, 1)$ y $t \in (-1, 0)$ tales que

    $$f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6.$$

18. Supóngase que f es una función real sobre $[a, b], n$ es un entero positivo, y $f^{(n-1)}$ existe para cada $t \in [a, b]$. Sean α, β, y P del teorema de Taylor 5.10. Definase

    $$Q(t) = \frac{f(t) - f(\beta)}{t - \beta}$$

    para $t \in [a, b], t \neq \beta$, diferenciese

    $$f(t) - f(\beta) = (t - \beta)Q(t)$$

    $n - 1$ veces en $t = \alpha$, y dedúzcase la siguiente versión del teorema de Taylor:

    $$f(\beta) = P(\beta) + \frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^n$$

19. Supóngase que f está definida en $(-1, 1)$ y $f'(0)$ existe. Supóngase también que $-1 < \alpha_n < \beta_n < 1$, $\alpha_n \to 0$, y $\beta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Definanse los cocientes de las diferencias siguientes:

    $$D_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

    Demostrar que:

    (a) Si $\alpha_n < 0 < \beta_n$, entonces $\lim D_n = f'(0)$.

    (b) Si $0 < \alpha_n < \beta_n$, y $\{\beta_n / (\beta_n - \alpha_n)\}$ es acotada, entonces $\lim D_n = f'(0)$.

    (c) Si f' es continua en $(-1, 1)$, entonces $\lim D_n = f'(0)$.

    Dar un ejemplo en el que f sea diferenciable en $(-1, 1)$ (pero f' no sea continua en 0) y en el que α_n, β_n tienda a 0 de tal forma que $\lim D_n$ exista, pero sea diferente de $f'(0)$.

20. Formular y demostrar una desigualdad que se deduce del teorema de Taylor, y que permanece válida para las funciones vectoriales.

21. Sea E un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^1$. Dijimos en el Ejercicio 22, capítulo 4 que existe una función real continua f en $\mathbb{R}^1$ cuyo conjunto cero es E. ¿Es posible, para cada conjunto cerrado E, hallar una tal f que sea diferenciable en $\mathbb{R}^1$, o una que sea n veces diferenciable o incluso una que tenga derivada de todos los órdenes en $\mathbb{R}^1$?

22. Supóngase que f es una función real definida sobre $(-\infty, \infty)$. Se dirá que x es un punto fijo de f si $f(x) = x$.

    (a) Si f es diferenciable y $f'(t) \neq 1$ para cada real t, demostrar que f tiene a lo más un punto fijo.

    (b) Mostrar que la función f definida por

    $$f(t) = t + \left(1 + e^t\right)^{-1}$$

    no tiene punto fijo, aunque $0 < f'(t) < 1$ para todo real t.

    (c) No obstante, si hay una constante $A < 1$ tal que $|f'(t)| \leq A$ para todo real t, demostrar que existe un punto fijo x de f, y que $x = \lim x_n$, en donde x_1 es un número real arbitrario y además

    $$x_{n+1} = f\left(x_n\right)$$

    para $n = 1, 2, 3, \ldots$

    (d) Mostrar que el procedimiento descrito en el apartado (c) puede entenderse a partir de la trayectoria en zig-zag

    $$(x_1, x_2) \to (x_2, x_2) \to (x_2, x_3) \to (x_3, x_3) \to (x_3, x_4) \to \cdots$$

23. La función f definida por

    $$f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$$

    tiene tres puntos fijos, a saber α, β, γ, donde

    $$-2 < \alpha < -1, \quad 0 < \beta < 1, \quad 1 < \gamma < 2.$$

    Si se escoge arbitrariamente x_1, y se define $\{x_n\}$ haciendo $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$.

    (a) Si $x_1 < \alpha$, demostrar que $x_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

    (b) Si $\alpha < x_1 < \gamma$, demostrar que $x_n \to \beta$ cuando $n \to \infty$.

    (c) Su $\gamma < x_1$, demostrar que $x_n \to +\infty$ cuando $n \to \infty$.

    Entonces β puede localizarse con este método, pero α y γ no.

24. El procedimiento que se describió en la parte (c) del Ejercicio 22 puede también aplicarse a funciones que mapean $(0, \infty)$ en $(0, \infty)$.

    Fijando algún $\alpha > 1$, y haciendo

    $$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right), \quad g(x) = \frac{\alpha + x}{1 + x}$$

    Entonces f y g tienen como único punto fijo en $(0, \infty)$ a $\sqrt{\alpha}$. Intentar explicar, en base a las propiedades de f y g, por qué la convergencia en el Ejercicio 16 del capítulo 3 es mucho más rápida que la del Ejercicio 17. (Compárense f' y g', y dibújense las trayectorias en zig-zag que se sugieren en el Ejercicio 22.)

    Hacer lo mismo cuando $0 < \alpha < 1$.

25. Supóngase que f es doblemente diferenciable sobre $[a, b], f(a) < 0, f(b) > 0$, $f'(x) \geq \delta > 0$, y $0 \leq f''(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Sea ξ el único punto en (a, b) en el cual $f(\xi) = 0$. Completar los detalles del siguiente esbozo del método de Newton para calcular ξ.

   (a) Escoger $x_1 \in (\xi, b)$, y definir $\{x_n\}$ por medio de
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}.$$
   Interpretar esto geométricamente, en términos de una tangente a la gráfica de f.

   (b) Demostrar que $x_{n+1} < x_n$ y que
   $$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi.$$

   (c) Usar el teorema de Taylor para mostrar que
   $$x_{n+1} - \xi = \frac{f''\left(t_n\right)}{2f'\left(x_n\right)}\left(x_n - \xi\right)^2$$
   para algún $t_n \in (\xi, x_n)$.

   (d) Si $A = M/2\delta$, dedúzcase que
   $$0 \leq x_{n+1} - \xi \leq \frac{1}{A}\left[A\left(x_1 - \xi\right)\right]^{2n}.$$
   (Compárese con los Ejercicios 16 y 18 del capítulo 3.)

   (e) Mostrar que el método de Newton es significativo para encontrar un punto fijo de la función g definida por
   $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
   ¿Cómo se comporta $g'(x)$ cuando x está muy cerca de ξ?

   (f) Hacer $f(x) = x^{1/3}$ sobre $(-\infty, \infty)$ y aplicar el método de Newton. ¿Qué ocurre?

26. Suponer que f es diferenciable en $[a, b]$; $f(a) = 0$ y hay un número real A tal que $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ en $[a, b]$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sugerencia: Dado $x_0 \in [a, b]$, sea
   $$M_0 = \sup|f(x)|, \quad M_1 = \sup\left|f'(x)\right|$$
   para $a \leq x \leq x_0$. Para cada tal x,
   $$|f(x)| \leq M_1\left(x_0 - a\right) \leq A\left(x_0 - a\right) M_0.$$
   Por tanto $M_0 = 0$, si $A\left(x_0 - a\right) < 1$. Esto es, $f = 0$ en $[a, x_0]$. Continuar.

27. Sea ϕ una función real definida en un rectángulo R en el plano, dado por $a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta$. Una solución del problema con valores iniciales
   $$y' = \phi(x, y), \quad y(a) = c \quad (\alpha \leq c \leq \beta)$$
   es, por definición, una función diferenciable f en $[a, b]$ tal que $f(a) = c, \alpha \leq f(x) \leq \beta$, y
   $$f'(x) = \phi(x, f(x)) \quad (a \leq x \leq b).$$

Demostrar que semejante problema tiene a lo más una solución si hay una constante A tal que

$$|\phi(x, y_2) - \phi(x, y_1)| \leq A\,|y_2 - y_1|$$

siempre que $(x, y_1) \in R, y\,(x, y_2) \in R$.

Sugerencia: Aplicar el Ejercicio 26 a la diferencia de dos soluciones. Observar que este teorema de unicidad no se cumple para el problema con valores iniciales

$$y' = y^{1/2}, \quad y(0) = 0,$$

que tiene dos soluciones: $f(x) = 0$ y $f(x) = x^2/4$. ¿Hay otras soluciones? Determinarlas.

28. Formular y demostrar un teorema de unicidad análogo, para sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma
$$y_j' = \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k), \quad y_j(a) = c_j \quad (j = 1, \ldots, k).$$
Obsérvese que puede también escribirse en la forma
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{c}$$
donde $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ varía sobre una celda-k, $\boldsymbol{\phi}$ es el mapeo de una celda-$k+1$) en el espacio-k euclidiano, cuyas componentes son las funciones $\phi_1, \ldots, \phi_k$, y $\boldsymbol{c}$ es el vector $(c_1, \ldots, c_k)$. Utilizar el Ejercicio 26 para funciones con valores vectoriales.

29. Particularizar el Ejercicio 28, considerando el sistema
$$\begin{aligned} y_j' &= y_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, k-1) \\ y_k' &= f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x) y_j \end{aligned}$$
donde $f, g_1, \ldots, g_k$ son funciones reales continuas en $[a, b]$ y deducir un teorema de unicidad para las soluciones de la ecuación
$$y^{(k)} + g_k(x) y^{(k-1)} + \cdots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x),$$
con las condiciones iniciales
$$y(a) = c_1, \quad y'(a) = c_2, \quad \ldots \quad , \quad y^{(k-1)}(a) = c_k.$$