CAPÍTULO 6

La integral de Riemann-Stieltjes

El presente capítulo está basado en una definición de la integral de Riemann, que depende muy explícitamente de la estructura de orden de la recta real. En consecuencia, empezaremos estudiando la integración de las funciones reales en intervalos. En capítulos posteriores seguirán las generalizaciones a funciones de variables complejas y vectoriales en intervalos. La integración en conjuntos distintos de los intervalos, se estudia en los capítulos 10 y 11 .

6.1 Definición y existencia de la integral

Definición 6.1 *Sea $[a,b]$ un intervalo dado. Por partición P de $[a,b]$ entendemos un conjunto finito de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ donde*

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Escribimos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Suponiendo, ahora, que f es una función real acotada definida en $[a,b]$. Correspondiendo a cada partición P de $[a,b]$ hacemos

$$\begin{aligned} M_i &= \sup f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i)\,, \\ m_i &= \text{ínf} f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i)\,, \\ U(P,f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \\ L(P,f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\overline{\int_a^b} f dx = \text{ínf}\, U(P,f), \tag{6.1.1}$$

$$\underline{\int_a^b} f dx = \sup L(P,f), \tag{6.1.2}$$

donde se han considerado el sup y el inf sobre todas las particiones P de $[a, b]$. Los primeros miembros de (6.1.1) y (6.1.2) se llaman integral superior e inferior de Riemann de f sobre $[a, b]$, respectivamente.

Si las integrales superior e inferior son iguales, decimos que f es integrable según Riemann, sobre $[a, b]$, escribimos $f \in \mathcal{R}$ (esto es, $\mathcal{R}$ representa el conjunto de las funciones integrales según Riemann) y representamos el valor común de (6.1.1) y (6.1.2) por

$$\int_a^b f dx \tag{6.1.3}$$

o por

$$\int_a^b f(x) dx. \tag{6.1.4}$$

Esta es la integral de Riemann de f sobre $[a, b]$.

Como f es acotada, existen dos números m y M, tales que

$$m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b).$$

De aquí que, para todo P,

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$$

de modo que los números $L(P, f)$ y $U(P, f)$ forman un conjunto acotado. Esto demuestra que las integrales superior e inferior están definidas para toda función acotada f. La cuestión de su igualdad, y por tanto de la integrabilidad de f es más delicada. En lugar de hallarla solamente para la integral de Riemann, consideraremos inmediatamente un caso más general.

Definición 6.2 *Sea α una función monótona creciente en $[a, b]$ (como $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ son finitas, se deduce que α es acotada en $[a, b]$). Correspondiendo a cada partición P de $[a, b]$, escribimos*

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

Es claro que $\Delta\alpha_i \geq 0$. Para toda función real f acotada en $[a, b]$ escribimos

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$$

donde M_i, m_i tienen el mismo significado que en la Definición 6.1 y definimos

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \tag{6.1.5}$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \tag{6.1.6}$$

tomando también los ínf *y los* sup *sobre todas las particiones.*

Si los primeros miembros de (6.1.5) *y* (6.1.6) *son iguales, representamos su valor común por*

$$\int_a^b f d\alpha \tag{6.1.7}$$

o algunas veces por

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \tag{6.1.8}$$

Esta es la integral de Riemann-Stieltjes (o simplemente la integral de Stieltjes) de f *respecto a* α*, sobre* $[a, b]$*.*

Si existe (6.1.7), esto es si (6.1.5) y (6.1.6) son iguales, decimos que f es integral con respecto a α, en el sentido de Riemann y escribimos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Tomando $\alpha(x) = x$, se ve que la integral de Riemann es un caso particular de la integral de Riemann-Stieltjes. Merece especial mención el hecho de que en el caso general α no necesita ni ser continua.

Diremos unas palabras sobre notaciones. Preferimos (6.1.7) a (6.1.8), pues la letra x que aparece en (6.1.8) no añade nada al contenido de (6.1.7). No tiene importancia qué letra empleemos para representar la llamada «variable de integración». Por ejemplo, (6.1.8) es lo mismo que

$$\int_a^b f(y) d\alpha(y)$$

La integral depende de f, α, a y b, pero no de la variable de integración, que puede incluso suprimirse.

El papel que juega la variable de integración es totalmente análogo al del índice de sumación: los dos símbolos

$$\sum_{i=1}^n c_i, \quad \sum_{k=1}^n c_k$$

expresan lo mismo, pues ambos significan $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Desde luego, no perjudica la inclusión de la variable de integración, e incluso en muchos casos es conveniente hacerlo.

Ahora, trataremos de la existencia de la integral (6.1.7). Sin mencionarlo cada vez, supondremos que f es real y acotada, y α monótona creciente en $[a, b]$; y cuando no se preste a confusión escribiremos $\int$ en lugar de $\int_a^b$.

Definición 6.3 *Decimos que la partición* P^* *es un refinamiento de* P*, si* $P^* \supset P$ *(esto es, si todo punto de* P *es punto de* P^**). Dadas dos particiones,* P_1 *y* P_2*, decimos que* P^* *es su refinamiento común si* $P^* = P_1 \cup P_2$*.*

Teorema 6.1 *Si* P^* *es un refinamiento de* P*, es*

$$L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha) \tag{6.1.9}$$

y

$$U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha). \tag{6.1.10}$$

V. Osores

Demostración: *Para demostrar* (6.1.9), *supongamos primero que* P^* *contiene solamente un punto más que* P. *Sea este punto* x^*, *y supongamos* $x_{i-1} < x^* < x_i$, *donde* x_{i-1} *y* x_1 *son dos puntos consecutivos de* P. *Hagamos*

$$\begin{aligned} w_1 &= \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x^*) \\ w_2 &= \inf f(x) \quad (x^* \leq x \leq x_i) \end{aligned}$$

Evidentemente $w_1 \geq m_i$ *y* $w_2 \geq m_i$, *siendo como antes*

$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} &L(P^*, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \\ &\quad = w_1 [\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2 [\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\ &\quad = (w_1 - m_i) [\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i) [\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \geq 0. \end{aligned}$$

Si P^* *contiene* k *puntos más que* P, *repetiremos el razonamiento anterior* k *veces, y llegaremos a* (6.1.9). *La demostración de* (6.1.10) *es análoga.*

Teorema 6.2 $\underline{\int_a^b} f d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha.$

Demostración: *Sea* P^* *el refinamiento común de dos particiones* P_1 *y* P_2. *Por el Teorema 6.1,*

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha) \leq U(P^*, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$$

Por tanto

$$L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) \tag{6.1.11}$$

Conservando P_2 *fijo, y tomando el sup sobre todo* P_1, (6.1.11) *da*

$$\underline{\int} f d\alpha \leq U(P_2, f, \alpha). \tag{6.1.12}$$

El teorema queda demostrado tomando el ínf sobre todo P_2 en (6.1.12).

Teorema 6.3 $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a, b]$ *si y solo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una partición* P *tal que*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon. \tag{6.1.13}$$

Demostración: *Para cada* P *tenemos*

$$L(P, f, \alpha) \leq \underline{\int} f d\alpha \leq \overline{\int} f d\alpha \leq U(P, f, \alpha).$$

Asi pues, (6.1.13) *implica*

$$0 \leq \overline{\int} f d\alpha - \underline{\int} f d\alpha < \varepsilon.$$

Por tanto, si (6.1.13) *se satisface para todo* $\varepsilon > 0$, *tenemos*

$$\overline{\int} f d\alpha = \underline{\int} f d\alpha$$

esto es, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Inversamente, supongamos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y sea* $\varepsilon > 0$ *dado. Existen particiones* P_1 *y* P_2 *tales que*

$$U\left(P_2, f, \alpha\right) - \int f d\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.1.14}$$

$$\int f d\alpha - L\left(P_1, f, \alpha\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.1.15}$$

Elijamos P *como refinamiento común de* P_1 *y* P_2. *El Teorema 6.1 juntamente con* (6.1.14) *y* (6.1.15) *demuestra que*

$$U(P, f, \alpha) \leq U\left(P_2, f, \alpha\right) < \int f d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} < L\left(P_1, f, \alpha\right) + \varepsilon \leq L(P, f, \alpha) + \varepsilon$$

de modo que se cumple (6.1.13) *para esta partición* P.

El Teorema 6.3 proporciona un criterio para la integrabilidad muy conveniente. Antes de aplicarlo se establecerán algunos hechos muy relacionados con este.

Teorema 6.4

(a) Si se cumple (6.1.13) *para alguna* P *y algún* ε, *entonces* (6.1.13) *se cumple también (con el mismo* ε*) para cada refinamiento de* P.

(b) Si se cumple (6.1.13) *para una* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *y si* s_i, t_i *son puntos arbitrarios en* $[x_{i-1}, x_i]$, *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|f\left(s_i\right) - f\left(t_i\right)\right| \Delta\alpha_i < \varepsilon.$$

(c) Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y la hipótesis de (b) se cumple, entonces*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(t_i\right) \Delta\alpha_i - \int_a^b f d\alpha\right| < \varepsilon.$$

Demostración: *El Teorema 6.1 implica (a). Debido a las suposiciones hechas en (b), se tiene que* $f\left(s_i\right)$ *y* $f\left(t_i\right)$ *están en* $[m_i, M_i]$, *así que* $\left|f\left(s_i\right) - f\left(t_i\right)\right| \leq M_i - m_i$. *Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|f\left(s_i\right) - f\left(t_i\right)\right| \Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$$

lo que demuestra (b). Las desigualdades evidentes

$$L(P, f, \alpha) \leq \sum f\left(t_i\right) \Delta\alpha_i \leq U(P, f, \alpha)$$

y

$$L(P, f, \alpha) \leq \int f d\alpha \leq U(P, f, \alpha)$$

demuestran (*c*).

Teorema 6.5 *Si f es continua sobre $[a,b]$ entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a,b]$.*

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado, y elijamos $\eta > 0$ tal que*

$$[\alpha(b) - \alpha(a)]\eta < \varepsilon.$$

Como f es uniformemente continua en $[a,b]$ (Teorema 4.12), existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(t)| < \eta \tag{6.1.16}$$

si $|x-t| < \delta$ y $x \in [a,b], t \in [a,b]$.

Si P es cualquier partición de $[a,b]$ tal que $\Delta x_i < \delta$. Entonces, (6.1.16) implica

$$M_i - m_i \leq \eta \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{6.1.17}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,\Delta\alpha_i \\ &\leq \eta \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \eta[\alpha(b) - \alpha(a)] < \varepsilon \end{aligned}$$

Por el Teorema 6.3, $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Teorema 6.6 *Si f es monótona en $[a,b]$ y α es continua en $[a,b], f \in \mathcal{R}(\alpha)$. (Supondremos, naturalmente, también que α es monótona.)*

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Para cada entero positivo n, elijamos una partición P tal que*

$$\Delta\alpha_i = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Lo que es posible, pues α es continuo (Teorema 4.15).

Supondremos que f es monótona creciente (la demostración es análoga en el otro caso). Entonces

$$M_i = f(x_i), \quad m_i = f(x_{i-1}) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

de modo que

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) =& \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ =& \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n} \cdot [f(b) - f(a)] < \varepsilon \end{aligned}$$

si se toma n suficientemente grande. Por el Teorema 6.3 $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Teorema 6.7 *Supóngase que f es acotada sobre $[a,b]$ tiene sólo un número finito de puntos de discontinuidad sobre $[a,b]$, y α es continua en cada punto para el cual f es discontinua. Entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Hágase $M = \sup|f(x)|$, y sea E el conjunto de puntos en los cuales f es discontinua. Como E es finito y α es continua en cada punto de E, se puede cubrir E con un número finito de intervalos ajenos $[u_j, v_j] \subset [a,b]$ tales que la suma de las diferencias correspondientes $\alpha(v_j) - \alpha(u_j)$ sea menor que ε. Además, pueden reemplazarse estos intervalos de tal manera que cada punto de $E \cap (a,b)$ esté en el interior de algún $[u_j, v_j]$.*

Quítense los segmentos (u_j, v_j) de $[a,b]$. El conjunto sobrante K es compacto. En consecuencia f es uniformemente continua sobre K, y existe $\delta > 0$ tal que $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ si $s \in K, t \in K, |s-t| < \delta$.

Ahora se forma una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, como sigue: cada u_j se encuentra en P. Cada v_j se encuentra en P. Ningún punto de cualquier segmento (u_j, v_j) se encuentra en P. Si x_{i-1} no es uno de los u_j, entonces $\Delta x_i < \delta$.

Nótese que $M_i - m_i \leq 2M$ para cada i, y que $M_i - m_i \leq \varepsilon$ a menos que x_{i-1} sea uno de los u_j. En consecuencia, de la misma forma que en la demostración del Teorema 6.5,

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) \leq [\alpha(b) - \alpha(a)]\varepsilon + 2M\varepsilon$$

Como ε es arbitrario, el Teorema 6.3 muestra que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Nota: Si f y α tienen un punto común de discontinuidad, entonces f no debe estar necesariamente en $\mathcal{R}(\alpha)$. Esto se muestra en el Ejercicio 3.

Teorema 6.8 *Supongamos que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b], m \leq f \leq M$, ϕ es continua en $[m, M]$, y $h(x) = \phi(f(x))$ en $[a,b]$. Entonces, $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$.*

Demostración: *Elijamos $\varepsilon > 0$. Como ϕ es uniformemente continua en $[m, M]$, existe $\delta > 0$, tal que $\delta < \varepsilon$ y $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$ si $|s-t| \leq \delta$ y $s, t \in [m, M]$.*

Como $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, hay una partición $P = \{x_1, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, tal que

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \delta^2 \tag{6.1.18}$$

Consideremos M_i y m_i con el mismo significado que en la Definición 6.1 y sean M_i^*, m_i^* los números análogos para h. Dividamos los números $1, \ldots, n$ en dos clases: $i \in A$ si $M_i - m_i < \delta$; $i \in B$ si $M_i - m_i \geq \delta$.

Para $i \in A$, la elección de δ muestra que $M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon$.

Para $i \in B, M_i^* - m_i^* \leq 2K$, siendo $K = \sup|\phi(t)|$ y $m \leq t \leq M$. Por (6.1.18), tenemos

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta\alpha_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\, \Delta\alpha_i < \delta^2 \tag{6.1.19}$$

de modo que $\sum_{i \in B} \Delta\alpha_i < \delta$. Se deduce que

$$\begin{aligned} U(P,h,\alpha) - L(P,h,\alpha) &= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)\, \Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)\, \Delta\alpha_i \\ &\leq \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K] \end{aligned}$$

Como ε era arbitrario, el Teorema 6.3 implica que $h \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Observación: Este teorema sugiere la pregunta: ¿Qué funciones son integrables según Riemann? La contestación figura en el Teorema 11.33(b).

6.2 Propiedades de la integral

Teorema 6.9

(a) Si $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y* $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a, b]$,

$$f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$$

$cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ *para toda constante* c, *y*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$
$$\int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

(b) Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ *en* $[a, b]$,

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha.$$

(c) Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a, b]$ *y* $a < c < b$, *entonces* $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a, c]$ *y en* $[c, b]$ *y*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha.$$

(d) Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a, b]$ *y* $|f(x)| \leq M$ *en* $[a, b]$,

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

(e) Si $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ *y* $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$, *entonces* $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ *y*

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2;$$

si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y* c *es una constante positiva, será* $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ *y*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha$$

Demostración: *Si* $f = f_1 + f_2$ *y* P *es alguna partición de* $[a, b]$, *tenemos que*

$$L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \tag{6.2.1}$$
$$\leq U(P, f, \alpha) \leq U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha) \tag{6.2.2}$$

Si $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y* $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, *sea* $\varepsilon > 0$ *dado. Existen particiones* P_j $(j = 1, 2)$, *tales que*

$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \varepsilon$$

Esas desigualdades subsisten si se sustituyen P_1 *y* P_2 *por su refinamiento común* P. *Entonces* (6.2.1) *implica*

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<2\varepsilon$$

lo que demuestra que $f\in\mathcal{R}(\alpha)$.

Con este mismo P*, tenemos*

$$U\left(P,f_j,\alpha\right)<\int f_j d\alpha+\varepsilon \quad (j=1,2);$$

por lo que (6.2.1) *implica*

$$\int f d\alpha \leq U(P,f,\alpha)<\int f_1 d\alpha+\int f_2 d\alpha+2\varepsilon$$

Como ε *era arbitrario, deducimos que*

$$\int f d\alpha \leq \int f_1 d\alpha+\int f_2 d\alpha. \tag{6.2.3}$$

Si sustituimos en (6.2.3) f_1 *y* f_2 *por* $-f_1$ *y* $-f_2$*, se invierte la desigualdad, y queda demostrada la igualdad.*

Las demostraciones de las otras afirmaciones del Teorema 6.9 son tan parecidas que omitimos los detalles. En el apartado (c) podemos limitarnos pasando a refinamientos a las particiones que contienen al punto c, al aproximar $\int f d\alpha$.

Teorema 6.10 *Si* $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ *y* $g\in\mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a,b]$,
(a) $fg\in\mathcal{R}(\alpha)$
(b) $|f|\in\mathcal{R}(\alpha)$ *y* $\left|\int_a^b f dx\right| \leq \int_a^b |f| d\alpha$.

Demostración: *Si tomamos* $\phi(t)=t^2$*, el Teorema 6.8 demuestra que* $f^2\in\mathcal{R}(\alpha)$ *si* $f\in\mathcal{R}(\alpha)$*. La identidad*

$$4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$$

completa la demostración de (a).

Si tomamos $\phi(t)=|t|$*, el Teorema 6.8 demuestra, de igual modo, que* $|f|\in\mathcal{R}(\alpha)$*. Elijamos* $c=\pm 1$*, de forma que*

$$c\int f d\alpha \geq 0$$

Será

$$\left|\int f d\alpha\right|=c\int f d\alpha=\int c f d\alpha \leq \int |f| d\alpha$$

pues $cf\leq |f|$.

Definición 6.4 *La función escalón unitario* I *se define como*

$$I(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 0),\\ 1 & (x>0).\end{cases}$$

Teorema 6.11 *Si $a < s < b$, f es acotada sobre $[a, b]$, f es continua en s, y $\alpha(x) = I(x - s)$, entonces*

$$\int_a^b f d\alpha = f(s).$$

Demostración: *Considérense particiones $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, donde $x_0 = a$, y $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Entonces*

$$U(P, f, \alpha) = M_2, \quad L(P, f, \alpha) = m_2$$

Debido a que f es continua en s, se ve que M_2 y m_2 converge hacia $f(s)$ cuando $x_2 \to s$.

Teorema 6.12 *Supóngase que $c_n \geq 0$ para $1, 2, 3, \ldots, \Sigma c_n$ converge, $\{s_n\}$ es una sucesión de puntos distintos en (a, b), y*

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - s_n) \tag{6.2.4}$$

Sea f continua sobre $[a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n) \tag{6.2.5}$$

Demostración: *La prueba de comparación muestra que la serie (6.2.4) converge para cada x. Su suma $\alpha(x)$ es evidentemente monótona y $\alpha(a) = 0$, $\alpha(b) = \Sigma c_n$.*

Sea $\varepsilon > 0$ conocido, y elíjase N de manera que

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$$

Haciendo

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x - s_n), \quad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x - s_n)$$

De los Teoremas 6.9 y 6.11 se tiene

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n) \tag{6.2.6}$$

Como $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) < \varepsilon$, entonces

$$\left| \int_a^b f d\alpha_2 \right| \leq M\varepsilon \tag{6.2.7}$$

donde $M = \sup |f(x)|$. Debido a que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, se deduce de (6.2.6) y (6.2.7) que

$$\left| \int_a^b f d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n) \right| \leq M\varepsilon \tag{6.2.8}$$

Si se hace $N \to \infty$, se obtiene (6.2.5).

Teorema 6.13 *Si se supone que α crece monótonamente y $\alpha' \in \mathcal{R}$ sobre $[a,b]$. Sea f una función real acotada sobre $[a,b]$.*
Entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ si y solo si $f\alpha' \in \mathcal{R}$. En este caso

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Demostración: *Sea $\varepsilon > 0$ dado y aplíquese el Teorema 6.3 a α': Existe una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tal que*

$$U\left(P,\alpha'\right) - L\left(P,\alpha'\right) < \varepsilon \tag{6.2.9}$$

El teorema del valor medio suministra puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$\Delta\alpha_i = \alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i$$

para $i = 1, \ldots, n$. Si $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha'\left(s_i\right) - \alpha'\left(t_i\right)\right| \Delta x_i < \varepsilon, \tag{6.2.10}$$

de (6.2.9) y el Teorema 6.4(b). Hacer ahora $M = \sup|f(x)|$. Ya que

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i$$

y se deduce de (6.2.10) que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\alpha'\left(s_i\right)\Delta x_i\right| \leq M\varepsilon. \tag{6.2.11}$$

En particular,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right)\Delta\alpha_i \leq U\left(P, f\alpha'\right) + M\varepsilon$$

para todas las elecciones de $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de manera que

$$U(P,f,\alpha) \leq U\left(P, f\alpha'\right) + M\varepsilon.$$

De (6.2.11), y con el mismo argumento se obtiene

$$U\left(P, f\alpha'\right) \leq U(P,f,\alpha) + M\varepsilon.$$

Entonces

$$\left|U(P,f,\alpha) - U\left(P, f\alpha'\right)\right| \leq M\varepsilon. \tag{6.2.12}$$

Ahora nótese que, (6.2.9) sigue siendo cierto si P se reemplaza por cualquier refinamiento. De aquí que (6.2.12) sigue siendo también cierto. Se concluye que

$$\left|\overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx\right| \leq M\varepsilon.$$

Pero ε es arbitrario. En consecuencia,

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx, \tag{6.2.13}$$

para cualquier f acotada. La igualdad de las integrales inferiores se deduce de (6.2.11) *exactamente de la misma forma. De aquí se deduce el teorema.*

Observación: *Los dos teoremas anteriores ilustran la generalidad y flexibilidad que son inherentes en el proceso de integración de Stieltjes. Si α es una función escalón pura [este es el nombre que con frecuencia se da a las funciones de la forma* (6.2.4)*], la integral se reduce a una serie finita o infinita. Si α tiene derivada integrable, la integral se reduce a una integral de Riemann ordinaria. Esto hace posible en la mayoría de los casos estudiar series e integrales en forma simultánea, en vez de separadamente.*

Considérese un ejemplo físico para ilustrar lo anterior. El momento de inercia de un alambre recto de longitud unitaria a través de uno de sus extremos y con respecto a un eje, que forma un ángulo recto con el alambre, es

$$\int_0^1 x^2 dm \tag{6.2.14}$$

en donde $m(x)$ es la masa que se tiene en el intervalo $[0, x]$. Si se considera que el alambre tiene densidad continua ρ, esto es, si $m'(x) = \rho(x)$, entonces (6.2.14) *se vuelve*

$$\int_0^1 x^2 \rho(x)dx \tag{6.2.15}$$

Por otro lado, si el alambre está compuesto de masas m_i concentradas en puntos x_i, (6.2.14) *se convierte en*

$$\sum_i x_i^2 m_i \tag{6.2.16}$$

Es por esto que (6.2.14) *contiene como casos especiales a* (6.2.15) *y* (6.2.16)*, pero también contiene mucho más; por ejemplo, el caso en el cual m es continua, pero no diferenciable en todas partes.*

Teorema 6.14 (cambio de variable) *Supóngase que φ es una función continua estrictamente creciente que mapea un intervalo $[A, B]$ sobre $[a, b]$. Supóngase también que α es monótona creciente sobre $[a, b]$ y $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a, b]$. Si se define β y g sobre $[A, B]$ por medio de*

$$\beta(y) = \alpha(\varphi(y)), \quad g(y) = f(\varphi(y)). \tag{6.2.17}$$

Entonces $g \in \mathcal{R}(\beta)$ y

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha. \tag{6.2.18}$$

Demostración: *A cada partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ le corresponde una partición $Q = \{y_0, \ldots, y_n\}$ de $[A, B]$, de tal manera que $x_i = \varphi(y_i)$. Todas las particiones de $[A, B]$ se obtienen de esta forma. Como los valores tomados por f sobre $[x_{i-1}, x_i]$ son exactamente los mismos que los tomados por g sobre $[y_{i-1}, y_i]$, se ve que*

$$U(Q, g, \beta) = U(P, f, \alpha), \quad L(Q, g, \beta) = L(P, f, \alpha) \tag{6.2.19}$$

V. Osores

Debido a que $f \in \mathcal{R}(\alpha), P$ *puede elegirse de tal manera que* $U(P, f, \alpha)$ *y* $L(P, f, \alpha)$ *estén próximas a* $\int f d\alpha$. *De aquí* (6.2.19) *combinada con el Teorema 6.3 muestra que* $g \in \mathcal{R}(\beta)$ *y que* (6.2.18) *se cumple. Esto completa la demostración.*

Nótese el siguiente caso especial:

Tomando $\alpha(x) = x$. Entonces $\beta = \varphi$. Suponiendo $\varphi' \in \mathcal{R}$ sobre $[A, B]$. Si se aplica el Teorema 6.13 al miembro izquierdo de (6.2.18), se obtiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy. \tag{6.2.20}$$

6.3 Integración y diferenciación

En esta sección continuamos limitándonos a las funciones reales. Demostraremos que la integración y la diferenciación son, en cierto sentido, operaciones inversas.

Teorema 6.15 *Sea* $f \in \mathcal{R}$ *en* $[a, b]$. *Para* $a \leq x \leq b$, *hagamos*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

En estas condiciones, F *es continua en* $[a, b]$; *además, si* f *es continua en un punto* x_0 *de* $[a, b], F$ *es diferenciable en* x_0, *y*

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Demostración: *Como* $f \in \mathcal{R}$, *es acotada. Supongamos* $|f(t)| \leq M$ *para* $a \leq t \leq b$. *Si* $a \leq x < y \leq b$, *será*

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq M(y - x),$$

por el Teorema 6.9(c) y (d). Dado $\varepsilon > 0$, *vemos que*

$$|F(y) - F(x)| < \varepsilon,$$

con tal que $|y - x| < \varepsilon / M$. *Esto demuestra la continuidad (en realidad la continuidad uniforme) de* F.

Supongamos, ahora, que f *es continua en* x_0. *Dado* $\varepsilon > 0$, *elijamos* $\delta > 0$, *tal que*

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

si $|t - x_0| < \delta$ *y* $a \leq t \leq b$. *Por tanto, si*

$$x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta \quad y \quad a \leq s < t \leq b$$

tenemos, por el Teorema 6.9(d)

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du \right| < \varepsilon.$$

Se deduce así, que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Teorema 6.16 (El teorema fundamental del cálculo) *Si $f \in \mathcal{R}$ sobre $[a,b]$ y si existe una función diferenciable F sobre $[a,b]$ tal que $F' = f$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demostración: *Dado $\varepsilon > 0$, elíjase una partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, de tal manera que $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$. El teorema del valor medio proporciona los puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ de tal manera que*

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i$$

para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = F(b) - F(a).$$

Y del Teorema 6.4(c) se deduce ahora que

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Por que esto se verifica para cada $\varepsilon > 0$, la demostración queda concluida.

Teorema 6.17 (Integración por partes) *Si F y G son funciones diferenciables sobre $[a,b]$, $F' = f \in \mathcal{R}$, y $G' = g \in \mathcal{R}$. Entonces*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Demostración: *Haciendo $H(x) = F(x)G(x)$ y aplicando el Teorema 6.16 a H y su derivada. Se ve claramente que $H' \in \mathcal{R}$, debido al Teorema 6.10.*

6.4 Integración de funciones vectoriales

Definición 6.5 *Sean $f_1, \ldots, f_k$ funciones reales en $[a,b]$ y $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ la correspondiente aplicación de $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$. Si α es monótona creciente en $[a,b]$, decir que $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$ significa que $f_j \in \mathcal{R}(\alpha)$ para $j = 1, \ldots, k$. En este caso, definimos*

$$\int_a^b \boldsymbol{f} d\alpha = \left(\int_a^b f_1 d\alpha, \ldots, \int_a^b f_k d\alpha \right)$$

En otras palabras, $\int \boldsymbol{f} d\alpha$ es el punto en $\mathbb{R}^k$ cuya coordenada j-ésima es $\int f_j d\alpha$.

Es claro que los apartados (a), (c) y (e) del Teorema 6.9 son válidos para estas integrales con valores vectoriales; no hacemos más que aplicar los resultados primitivos a cada coordenada. Lo mismo es cierto respecto al Teorema 6.13, 6.15 y 6.16. Como aclaración, enunciamos el análogo al Teorema 6.16.

Teorema 6.18 *Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{F}$ aplican $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$, si $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}$ en $[a,b]$ y $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$, entonces*

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)dt = \boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a).$$

El análogo al Teorema 6.10(b) presenta, sin embargo, algún aspecto nuevo, al menos en la demostración:

Teorema 6.19 *Si $\boldsymbol{f}$ aplica $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$ y $\boldsymbol{f} \in \mathcal{R}(\alpha)$ para alguna función monótona creciente α en $[a,b]$, entonces $|\boldsymbol{f}| \in \mathcal{R}(\alpha)$ y*

$$\left|\int_a^b \boldsymbol{f} d\alpha\right| \leq \int_a^b |\boldsymbol{f}| d\alpha \tag{6.4.1}$$

Demostración: *Si $f_1, \ldots, f_k$ son las componentes de $\boldsymbol{f}$,*

$$|\boldsymbol{f}| = \left(f_1^2 + \cdots + f_k^2\right)^{1/2}. \tag{6.4.2}$$

Por el Teorema 6.8, cada una de las funciones f_i^2 pertenece a $\mathcal{R}(\alpha)$, por lo que también su suma. Como x^2 es una función continua de x, el Teorema 4.11 demuestra que la función raíz cuadrada es continua en $[0,M]$, para todo número real M. Si aplicamos una vez más el Teorema 6.8, (6.4.2) *demuestra que $|\boldsymbol{f}| \in \mathcal{R}(\alpha)$.*

Para probar (6.4.1)*, hagamos $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ donde $y_j = \int f_j d\alpha$. Será $\boldsymbol{y} = \int \boldsymbol{f} d\alpha$, y*

$$|\boldsymbol{y}|^2 = \sum y_i^2 = \sum y_j \int f_j d\alpha = \int \left(\sum y_j f_j\right) d\alpha.$$

Por la desigualdad de Schwarz,

$$\sum y_j f_j(t) \leq |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{f}(t)| \quad (a \leq t \leq b) \tag{6.4.3}$$

por lo que el Teorema 6.9(b) implica

$$|\boldsymbol{y}|^2 \leq |\boldsymbol{y}| \int |\boldsymbol{f}| d\alpha \tag{6.4.4}$$

Si $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, (6.4.1) *es trivial. Si $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, la división de* (6.4.4) *por $|\boldsymbol{y}|$ da* (6.4.1)*.*

6.5 Curvas rectificables

Terminamos este capítulo con un tema, de interés en geometría, que proporciona una aplicación de algo de la teoría precedente. El caso $k = 2$ (esto es, el caso de las curvas planas) es de importancia considerable en el estudio de las funciones analíticas de variable compleja.

Definición 6.6 *Una aplicación continua γ de un intervalo $[a,b]$ en $\mathbb{R}^k$ se llama curva en $\mathbb{R}^k$. Para hacer notar el intervalo del parámetro $[a,b]$, se dice también que γ es una curva sobre $[a,b]$.*
Si γ es uno-a-uno, γ se llama arco.
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, se dice que es una curva cerrada.

Debe observarse que se ha definido una curva como una aplicación, no como un conjunto de puntos. Por supuesto que cada curva γ en $\mathbb{R}^k$ tiene asociado un subconjunto de $\mathbb{R}^k$, es decir el rango de γ, pero que diferentes curvas pueden tener el mismo rango.

A cada partición $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ de $[a,b]$ y a toda curva γ sobre $[a,b]$ se le asocia el número

$$\Lambda(P,\gamma)=\sum_{i=1}^{n}\left|\gamma\left(x_i\right)-\gamma\left(x_{i-1}\right)\right|.$$

El término i-ésimo en esta suma es la distancia (en $\mathbb{R}^k$) entre los puntos $\gamma\left(x_{i-1}\right)$ y $\gamma\left(x_i\right)$. En consecuencia $\Lambda(P,\gamma)$ es la longitud de una trayectoria poligonal con vértices en $\gamma\left(x_0\right),\gamma\left(x_1\right),\ldots,\gamma\left(x_n\right)$, conservando este orden. Conforme la partición se hace más fina, este polígono se aproxima al rango de γ cada vez más. Esto hace razonable definir la longitud de γ como

$$\Lambda(\gamma)=\sup\Lambda(P,\gamma)$$

donde el supremum se toma sobre todas las particiones de $[a,b]$.

Si $\Lambda(\gamma)<\infty$, se dice que γ es rectificable.

En algunos casos, $\Lambda(\gamma)$ se da como una integral de Riemann. Se demostrará esto para curvas continuamente diferenciables, es decir, para curvas γ cuya derivada γ' es continua.

Teorema 6.20 *Si γ' es continua sobre $[a,b]$, entonces γ es rectificable, y*

$$\Lambda(\gamma)=\int_a^b\left|\gamma'(t)\right|dt$$

Demostración: *Si $a\leq x_{i-1}<x_i\leq b$, entonces*

$$\left|\gamma\left(x_i\right)-\gamma\left(x_{i-1}\right)\right|=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\gamma'(t)dt\right|\leq\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\gamma'(t)\right|dt.$$

Por consiguiente

$$\Lambda(P,\gamma)\leq\int_a^b\left|\gamma'(t)\right|dt.$$

para cada partición P de $[a,b]$. En consecuencia,

$$\Lambda(\gamma)\leq\int_a^b\left|\gamma'(t)\right|dt.$$

Para demostrar la desigualdad opuesta, sea $\varepsilon>0$ dado. Como γ' es uniformemente continua sobre $[a,b]$, existe $\delta>0$ tal que

$$\left|\gamma'(s)-\gamma'(t)\right|<\varepsilon \text{ si } |s-t|<\delta.$$

Sea $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$, con $\Delta x_i<\delta$ para toda i. Si $x_{i-1}\leq t\leq x_i$, se deduce que

$$\left|\gamma'(t)\right|\leq\left|\gamma'\left(x_i\right)\right|+\varepsilon.$$

V. Osores

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left|\gamma'(t)\right| dt &\leq \left|\gamma'\left(x_i\right)\right| \Delta x_i + \varepsilon \Delta x_i \\ &= \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\gamma'(t) + \gamma'\left(x_i\right) - \gamma'(t)\right] dt \right| + \varepsilon \Delta x_i \\ &\leq \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t) dt \right| + \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\gamma'\left(x_i\right) - \gamma'(t)\right] dt \right| + \varepsilon \Delta x_i \\ &\leq \left|\gamma\left(x_i\right) - \gamma\left(x_{i-1}\right)\right| + 2\varepsilon \Delta x_i .\end{aligned}$$

Si se adicionan estas desigualdades, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt &\leq \Lambda(P, \gamma) + 2\varepsilon(b-a) \\ &\leq \Lambda(\gamma) + 2\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

Debido a que ε *era arbitrario,*

$$\int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt \leq \Lambda(\gamma).$$

Esto completa la demostración.

6.6 Ejercicios

1. Suponer que α es creciente en $[a, b]; a \leq x_0 \leq b; \alpha$ es continua en $x_0; f\left(x_0\right) = 1$, y $f(x) = 0$ si $x \neq x_0$. Demostrar que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y que $\displaystyle\int f d\alpha = 0$.

2. Suponer que $f \geq 0; f$ es continua en $[a, b]$, y $\int_a^b f(x) dx = 0$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. (Comparar con el Ejercicio 1.)

3. Definir tres funciones $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ como sigue: $\beta_j(x) = 0$ si $x < 0; \beta_j(x) = 1$ si $x > 0$ para $j = 1, 2, 3$; y $\beta_1(0) = 0$; $\beta_2(0) = 1$; $\beta_3(0) = \frac{1}{2}$. Sea f una función acotada en $[-1, 1]$.
   (a) Demostrar que $f \in \mathcal{R}\left(\beta_1\right)$ si, y solo si $f(0+) = f(0)$, y que en este caso
   $$\int f d\beta_1 = f(0).$$
   (b) Plantear y demostrar un resultado similar para β_2.
   (c) Demostrar que $f \in \mathcal{R}\left(\beta_3\right)$ si, y solo si f es continua en 0 .
   (d) Si f es continua en 0 , demostrar que
   $$\int f d\beta_1 = \int f d\beta_2 = \int f d\beta_3 = f(0).$$

4. Si $f(x) = 0$ para todo número irracional x, y $f(x) = 1$ para todo racional x, demostrar que $f \notin \mathcal{R}$ en $[a, b]$ para un $a < b$.

5. Supóngase que f es una función real acotada sobre $[a, b]$, y que $f^2 \in \mathcal{R}$ sobre $[a, b]$. ¿Se puede deducir que $f \in \mathcal{R}$? Si se supone que $f^3 \in \mathcal{R}$, ¿cambia la respuesta?

6. Sea el conjunto de Cantor P construido en la sección 2.44. Sea f una función real acotada sobre $[0, 1]$ continua en cada punto que esté fuera de P. Demostrar que $f \in \mathcal{R}$ sobre $[0, 1]$. Sugerencia: P puede cubrirse con un número finito de segmentos cuya longitud total pueda hacerse tan pequeña como se desee. Proceder de la misma forma que en el Teorema 6.7.

7. Supóngase que f es una función real definida sobre $(0, 1]$ y que $f \in \mathcal{R}$ sobre $[c, 1]$ para cada $c > 0$. Se define

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{c \to 0} \int_c^1 f(x)dx$$

si el limite existe (y es finito).

(a) Si $f \in \mathcal{R}$ sobre $[0, 1]$, mostrar que esta definición de la integral coincide con la definición antigua.

(b) Construir una función f tal que el límite anterior exista, aunque no exista cuando $|f|$ se reemplace por f.

8. Supóngase que $f \in \mathcal{R}$ sobre $[a, b]$ para cada $b > a$ con a fija. Se define

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe (y es finito). En este caso se dice que la integral de la izquierda converge. Si ésta también converge después de haber reemplazado f por $|f|$, entonces se dice que converge absolutamente.

Supóngase ahora que $f(x) \geq 0$ y que f es monótona decreciente sobre $[1, \infty)$. Demostrar que

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

converge si, y solo si

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

converge. (Este es el llamado "criterio de la integral" para la convergencia de series.)

9. Mostrar que algunas veces puede aplicarse la integración por partes a las integrales "impropias" que se definieron en los Ejercicios 7 y 8 . (Formular un teorema estableciendo las hipótesis apropiadas y demostrarlo.) Por ejemplo mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x)^2} dx$$

Mostrar que una de estas integrales converge absolutamente, pero la otra no.

10. Sean p y q dos números reales positivos tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Demostrar lo siguiente:

(a) Si $u \geq 0$ y $v \geq 0$, entonces

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

La igualdad es cierta si, y solo si $u^p = v^q$.

(b) Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, $g \in \mathcal{R}(\alpha)$, $f \geq 0$, $g \geq 0$, y

$$\int_a^b f^p d\alpha = 1 = \int_a^b g^q d\alpha,$$

entonces

$$\int_a^b fg d\alpha \leq 1.$$

(c) Si f y g son funciones complejas en $\mathcal{R}(\alpha)$, entonces

$$\left|\int_a^b fg d\alpha\right| \leq \left\{\int_a^b |f|^p d\alpha\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |g|^q d\alpha\right\}^{1/q}$$

Esta es la desigualdad de Hölder. Cuando $p = q = 2$, se llama comúnmente desigualdad de Schwarz. (Nótese que el Teorema 1.11 es un caso muy especial de ésta.)

(d) Mostrar que la desigualdad de Hölder también es verdadera para las integrales “impropias” que se describieron en los Ejercicios 7 y 8.

11. Sea α una función creciente fija sobre $[a, b]$. Si $u \in \mathcal{R}(\alpha)$ se define

$$\|u\|_2 = \left\{\int_a^b |u|^2 d\alpha\right\}^{1/2}$$

Supóngase que $f, g, h \in \mathcal{R}(\alpha)$, y demuéstrese la desigualdad del triángulo

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

como una consecuencia de la desigualdad de Schwarz, de la misma manera que en la demostración del Teorema 1.12.

12. Con las notaciones del Ejercicio 11, supóngase que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y $\varepsilon > 0$. Demostrar que existe una función continua g sobre $[a, b]$ tal que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

Sugerencia: Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición adecuada de $[a, b], y$ definase

$$g(t) = \frac{x_i - t}{\Delta x_i} f\left(x_{i-1}\right) + \frac{t - x_{i-1}}{\Delta x_i} f\left(x_i\right)$$

si $x_{i-1} \leq t \leq x_i$.

13. Si se define

$$f(x) = \int_x^{x+1} \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt.$$

(a) Demostrar que $|f(x)| < 1/x$ si $x > 0$.

Sugerencia: Hacer $t^2 = u$ e integrar por partes, para mostrar que $f(x)$ es igual a

$$\frac{\cos\left(x^2\right)}{2x} - \frac{\cos\left[(x+1)^2\right]}{2(x+1)} - \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{4u^{3/2}} du$$

Reemplazar $\cos u$ por -1.

(b) Demostrar que

$$2xf(x) = \cos\left(x^2\right) - \cos\left[(x+1)^2\right] + r(x)$$

en donde $|r(x)| < c/x$ y c es una constante.

(c) Encontrar los límites superior e inferior de $xf(x)$, cuando $x \to \infty$.

(d) ¿Converge $\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt$?

14. Si

$$f(x) = \int_x^{x+1} \operatorname{sen}\left(e^t\right) dt.$$

Mostrar que

$$e^x|f(x)| < 2$$

y que

$$e^x f(x) = \cos\left(e^x\right) - e^{-1}\cos\left(e^{x+1}\right) + r(x)$$

en donde $|r(x)| < Ce^{-x}$, para alguna constante C.

15. Supóngase que f es real, y continuamente diferenciable sobre $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$, y

$$\int_a^b f^2(x)dx = 1$$

Demostrar que

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$$

y también que

$$\int_a^b \left[f'(x)\right]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x)dx > \frac{1}{4}.$$

16. Para $1 < s < \infty$, se define

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(Ésta es la función zeta de Riemann, que es muy importante en el estudio de la distribución de los números primos.) Demostrar que

(a) $\zeta(s) = s\int_1^\infty \frac{[x]}{x^{s+1}}dx$

y que

(b) $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$, en donde $[x]$ representa el entero mayor $\leq x$.

Demostrar que la integral del apartado (b) converge para todo $s > 0$.

Sugerencia: Para demostrar (a), calcular la diferencia entre la integral sobre $[1, N]$ y la N-ésima suma parcial de la serie que define a $\zeta(s)$.

17. Supóngase que α crece monótonamente sobre $[a,b]$, que g es continua, y $g(x) = G'(x)$ para $a \leq x \leq b$. Demostrar que

$$\int_a^b \alpha(x)g(x)dx = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \int_a^b Gd\alpha.$$

Sugerencia: Tomar g real, sin perder generalidad. Dado $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, elegir $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ de tal manera que $g(t_i)\Delta x_i = G(x_i) - G(x_{i-1})$. Mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i) g(t_i) \Delta x_i = G(b)\alpha(b) - G(a)\alpha(a) - \sum_{i=1}^{n} G(x_{i-1}) \Delta\alpha_i.$$

18. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, curvas en el plano complejo, definidas en $[0, 2\pi]$ por

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad \gamma_2(t) = e^{2it}, \quad \gamma_3(t) = e^{2\pi it \operatorname{sen}(1/t)}.$$

Demostrar que estas tres curvas tienen el mismo rango que γ_1 y γ_2 son rectificables, que la longitud de γ_1 es 2π, que la de γ_2 es 4π y que γ_3 no es rectificable.

19. Sea γ_1 una curva en $\mathbb{R}^k$, definida en $[a,b]$; sea ϕ un mapeo $1-1$ continuo de $[c,d]$ sobre $[a,b]$, tal que $\phi(c) = a$, y definamos $\gamma_2(s) = \gamma_1(\phi(s))$. Demostrar que γ_2 es un arco, una curva cerrada simple o una curva rectificable, si y solo si es cierto lo mismo para γ_1. Demostrar que γ_2 y γ_1 tienen la misma longitud.