CAPÍTULO 1

Definiciones Básicas

En este capitulo introduciremos algunos conceptos básicos y daremos una serie de ejemplos de problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales que resolveremos a lo largo del libro.

1.1 Introducción

Vamos a comenzar presentando notación y terminología. Denotaremos al *espacio euclideano* de dimensión n, donde n es un entero mayor o igual que 1, por $\mathbb{R}^n$. El conjunto de los *números enteros* será denotado por $\mathbb{Z}$ y el de los *números complejos* por $\mathbb{C}$. Por convención en este curso el cero no es un *número natural*, de modo que consideraremos al conjunto de los números naturales como $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$. También usaremos la notación $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$.

Dados dos puntos (o vectores), $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, la *distancia* entre x e y viene dada por

$$|x - y| = \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1.1}$$

El conjunto de todos los puntos a una distancia menor que $r > 0$ de un punto fijo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es llamada *bola abierta* centrada en x_0 de radio r denotada por $B(x_0, r)$, esto es,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

Un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ es *abierto* si, dado cualquier $x_0 \in \Omega$, existe una bola abierta centrada en x_0 totalmente contenida en Ω. Un subconjunto F de $\mathbb{R}^n$ es *cerrado* si su complemento

$$\mathbb{R}^n - F = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin F\}$$

es abierto. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la *clausura* de A, denotada por $\bar{A}$, es el mínimo conjunto cerrado que lo contiene; el *interior* de A, denotado por A°, es el máximo conjunto abierto contenido en A y el borde o *frontera* de A, denotado por ∂A, es

$$\partial A = \{x \in \bar{A} : x \notin A^\circ\}.$$

Si $u = u(x, y, z, t, \ldots)$ es una función de varias variables, usaremos notaciones diferentes para las *derivadas parciales* de u por ejemplo, la derivada parcial de u respecto de la variable x, que es la primera variable, podrá denotarse por

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ u_x,\ \partial_x u \ \text{ ó } \ D_1 u.$$

Análogamente, las derivadas de segundo orden podrán denotarse por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xx},\ \partial_x^2 u \ \text{ ó } \ D_1^2 u,$$

en caso de derivación respecto a la misma variable x y, en el caso de variables diferentes, derivando primero respecto a x y luego respecto a y,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad u_{yx}, \quad \partial_y \partial_x u \quad \text{o} \quad D_2 D_1 u.$$

Una *ecuación en derivadas parciales* o *ecuación diferencial parcial* (EDP) es una ecuación con dos o más variables independientes x, y, z, t, ... y derivadas parciales de una función (variable dependiente) $u = u(x, y, z, t, \ldots)$. Más precisamente, una EDP en n variables independientes $x_1 \ldots, x_n$ es una ecuación de la forma

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \tag{1.1.2}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, F es una función dada y $u = u(x)$ es la función que deseamos determinar. Observe que con una definición tan general existen EDPs absurdas, como por ejemplo $\exp(u_x + u_y) = 0$.

La clasificación de EDPs segun *orden* y *linealidad* es semejante a la clasificación de las *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDOs). El *orden* de una EDP es dado por la derivada parcial de mayor orden que aparece en la ecuación; por ejemplo, el orden de la ecuación (1.1.2) es k si F, como función de alguna de las derivadas de orden k, no es constante. Se dice que una EDP es *lineal* si es de primer grado en u y en todas sus derivadas parciales que aparecen en la ecuación. En caso contrario se dice que la ecuación es *no lineal*. La forma más general de una EDP lineal de primer orden es

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_j u + b(x) u + c(x) = 0, \tag{1.1.3}$$

donde alguno de los coeficientes a_j no es idénticamente nulo. Para ecuaciones de segundo orden, la forma más general de una EDP lineal es

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u + d(x) = 0, \tag{1.1.4}$$

en donde alguno de los coeficientes a_{ij} no es identicamente nulo. En caso de dos variables independientes, las ecuaciones (1.1.3) y (1.1.4) pueden reformularse, respectivamente,

$$A(x, y) u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u + D(x, y) = 0. \tag{1.1.5}$$

$$\begin{aligned} A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + &C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x \\ &+ E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Nota: La ecuación (1.1.6) no contiene término alguno con u_{yx}, aunque la ecuación (1.1.4) contenga tal término; la razón es que estamos interesados en las llamadas soluciones clásicas de la ecuación (1.1.6), esto es, soluciones u que son dos veces continuamente diferenciables en la región de interés Ω. Para tales funciones, $u_{xy} = u_{yx}$.

Decimos que una EDP lineal es *homogénea* si el término que no contiene a la variable dependiente es idénticamente nula.

Ejemplo 1.1.1

1. *La ecuación* (1.1.5) *es homogénea si y solamente si la función* $D(x,y)$ *es idénticamente nula.*
2. *La ecuación* (1.1.6) *es homogénea si y solamente si* $G(x,y) = 0$.

Nota: Observe que la función idénticamente nula es siempre solución de cualquier EDP lineal homogénea.

La parte de la ecuación que contiene las derivadas de mayor orden determina, en muchos casos, propiedades de las soluciones; esa es la llamada *principal* de la EDP. Por ejemplo, las partes principales de las ecuaciones (1.1.5) y (1.1.6) son, respectivamente,

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y,$$

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}.$$

Entre las ecuaciones no lineales, las que tienen la parte principal lineal son llamadas *semilineales*. Por ejemplo, una EDP de primer orden semilineal con tres variables independientes x, y, z es de la forma

$$A(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = F(x,y,z,u).$$

La forma más general de una EDP semilineal de segundo orden es

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u = f\left(x, u, D_1 u, \ldots, D_n u\right).$$

Ejemplo 1.1.2

1. *La ecuación*

   $$xu_x - yu_y = \operatorname{sen}(xy)$$

   es una EDP lineal no homogénea de primer orden.

2. *La ecuación*

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

es semilineal de tercer orden. Se le conoce como KdV (una abreviación de Korteweg y de Vries).

3. *Una ecuación más simple es la ecuación de* Burger*, con viscosidad*

$$\partial_t u + u\partial_x u = \nu \partial_x^2 u,$$

donde ν es constante, que también es semilineal pero de segundo orden.

4. *La ecuación de* Sine-Gordon*,*

$$u_{tt} - u_{xx} + \operatorname{sen} u = 0,$$

es una EDP semilineal de segundo orden.

5. *La ecuación de* Poisson*,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x,y)$$

es una ecuación lineal de segundo orden no homogénea si la función h no fuera idénticamente nula. En caso que $h \equiv 0$, la ecuación es homogénea y llamada ecuación de Laplace*. La ecuación de* Poisson *está asociada a fenómenos físicos estacionarios, esto es, independientes del tiempo, como por ejemplo potenciales electrostáticos generados por distribuciones fijas de carga.*

6. *La ecuación del calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$ y α^2 es una constante. En dimensiones mayores la ecuación del calor es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u,$$

donde $u = u(x,t), x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ y Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^n$ (en las variables espaciales $x_1, \ldots, x_n$). Esta ecuación es de segundo orden, lineal y homogénea.

7. *La ecuación de onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

es lineal, homogénea y de segundo orden. La variable $t > 0$ representa el tiempo, $x \in \mathbb{R}$ es la variable espacial y $c > 0$ es una constante (velocidad de propagación de la onda). La ecuación de onda en dimensiones mayores viene dada por

$$u_{tt} = c^2 \Delta u,$$

donde $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ y Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^n$. La ecuación de onda, como su nombre lo indica, está asociada a fenómenos ondulatorios.

Las ecuaciones de Poisson, del calor y de la onda, además de ser interesantes desde el punto de vista físico, son prototipos de los tipos elíptico, parabólico e hiperbólico, respectivamente (que describiremos en el Capítulo 4) y el conocimiento de sus propiedades permite estudiar ecuaciones más generales de cada tipo. La mayor parte de este libro trata de problemas relacionados con esas ecuaciones en dos variables independientes.

1.2 Linealidad y Superposición

Las consideraciones que haremos a continuación son válidas para las EDPs lineales de cualquier orden pero, para fijar ideas, consideraremos una EDP de primer o segundo orden con n variables independientes $x_1, \ldots, x_n$. Usaremos la notación vectorial $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Estamos considerando entonces una ecuación del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0. \tag{1.2.1}$$

Denotaremos por k el orden de la ecuación, $k = 1$ ó $k = 2$. Note que si $k = 1$, entonces $a_{ij} \equiv 0$ cualesquiera que sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y existe j, $1 \leq j \leq n$, tal que $b_j \neq 0$.

Podemos reformular la ecuación (1.2.1) en la forma

$$Lu = f, \tag{1.2.2}$$

donde $f(x) = -d(x)$ y

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x). \tag{1.2.3}$$

A cada función u (suficientemente diferenciable) le corresponde una única función Lu; de esa manera definimos un *operador* o *transformación* L. Más precisamente, sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y suponga que las funciones a_{ij}, b_j y c, para $1 \leq i, j \leq n$, son continuas en Ω y toman valores reales; podemos entonces definir

$$\begin{aligned} L : C^k(\Omega) &\to C(\Omega) \\ u &\to Lu \end{aligned}$$

donde Lu es dado por la fórmula (1.2.3) y $C^k(\Omega)$ (resp. $C(\Omega)$) es el conjunto de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ k veces continuamente diferenciables (resp. continuas).

Observación: En este libro nos interesaremos básicamente en soluciones reales para las EDPs, aunque la teoría para las funciones complejas sea completamente análoga. Sin embargo, en muchas ocasiones usaremos funciones complejas auxiliares, notoriamente en el estudio de las series e integrales de Fourier. Aprovechamos la oportunidad para recordar que, si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, entonces existen funciones reales $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ univocamente determinadas, tales que

$$f(x) = u(x) + iv(x), \forall x \in \Omega,$$

$u = \operatorname{Re} f$ es la parte real de f y $v = \operatorname{Im} f$ es la parte imaginaria de f. La función f es continua (resp. diferenciable) en x si y solamente si u y v son continuas (resp. diferenciables) en x. Además, la función f puede ser integrada en relación a una de las variables (por ejemplo, x_1) en el intervalo $[a, b]$ si y solamente si u y v pueden serlo; en ese caso

$$\int_a^b f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 = \int_a^b u(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + i \int_a^b v(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1$$

Denotaremos por $C^k_{\mathbb{C}}(\Omega)$ (resp. $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$) al conjunto de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ k veces continuamente diferenciables (resp. continuas).

El término *operador* (o transformación) se usa para resaltar que la función L está definida entre espacios de funciones, esto es, L lleva una función u (con determinadas propiedades) en otra función Lu. El operador L es un ejemplo de un operador diferencial parcial.

El hecho que la ecuación (1.2.1) es lineal implica que el operador L definido por (1.2.3) es un operador lineal, es decir, L lleva la función idénticamente nula en ella misma y

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv \tag{1.2.4}$$

cualesquiera sean u, v en el dominio de L y para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. La propiedad (1.2.4) puede deducirse fácilmente de la expresión (1.2.3).

Como en el caso de las EDOs, podemos asociar a la EDP no homogénea (1.2.2) la EDP lineal homogénea

$$Lu = 0, \tag{1.2.5}$$

que es llamada *ecuación homogénea* asociada a la ecuación (1.2.2). Usando la linealidad del operador L e inducción, es fácil ver que toda combinación lineal de soluciones de la ecuación (1.2.5) es también solución, es decir, si $u_1, \ldots, u_m$ satisfacen (1.2.5) y si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son escalares, entonces

$$u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$$

también es solución de (1.2.5). En el lenguaje del álgebra lineal, L es un operador lineal definido en un espacio vectorial V de funciones $\left(V = C^k(\Omega)\right)$ y las soluciones $u \in V$ de la ecuación (1.2.5) forman un subespacio de V. Este resultado es conocido como el *principio de superposición* (en su forma finita).

Al contrario de lo que sucede con las EDOs lineales homogéneas, el espacio de soluciones de la ecuación (1.2.5) puede tener dimensión infinita. Además, existen EDPs lineales de primer orden que no tienen solución! (El primer ejemplo de una tal ecuación con coeficientes complejos fue dado por H. Lewy en 1957: él probó que existe una función f tal que la ecuación

$$u_x + iu_y - 2i(x + iy)u_t = f$$

no tiene solución.

Ejemplo 1.2.1 *Vamos a buscar soluciones clásicas de la ecuación lineal homogénea:*

$$u_{xy} = 0 \tag{1.2.6}$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *En este caso el operador* L *es dado por*

$$\begin{aligned} &L : C^2\left(\mathbb{R}^2\right) \to C\left(\mathbb{R}^2\right) \\ &(Lu)(x, y) = u_{xy}(x, y), u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right), (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Vamos a resolver (1.2.6) *por integración: fijando la variable* x *e integrando respecto de* y*, obtenemos*

$$u_x = F(x)$$

donde F *es una función arbitraria en* $C^1(\mathbb{R})$*; fijando ahora la variable* y *e integrando respecto de* x*, obtenemos*

$$u(x,y) = f(x) + g(y) \tag{1.2.7}$$

donde f *es una primitiva de* F *en* $C^2(\mathbb{R})$ *y* g *es una función arbitraria en* $C^2(\mathbb{R})$*; como* F *es arbitraria, se sigue que* f *y* g *son funciones arbitrarias en* $C^2(\mathbb{R})$*. Como es evidente que todas las funciones de la forma* (1.2.7) *con* f *y* $g \in C^2(\mathbb{R})$ *son soluciones de la ecuación* (1.2.6)*; concluimos que el espacio de las soluciones clásicas de* (1.2.6) *es precisamente el conjunto*

$$\left\{u \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right) : u(x,y) = f(x) + g(y), (x,y) \in \mathbb{R}^2, f, g \in C^2(\mathbb{R})\right\}.$$

Por tanto, en ese caso simple, el espacio de soluciones tiene dimensión infinita. Tal vez fuimos un poco exagerados en el ejemplo anterior, al insistir tantas veces en los espacios de funciones utilizados. Esa exageración fue a propósito: queriamos resaltar la importancia del espacio de funciones donde buscamos las soluciones (en otras palabras, el dominio del operador L*). De hecho, hasta ahora no hemos definido lo que entendemos por solución de una EDP, la noción intuitiva de que una solución es una función que satisface idénticamente la ecuación es muy vaga; existen muchas interpretaciones posibles de esa noción intuitiva, generalizando inclusive el concepto de función. Esta discusión va más allá del presente texto y el lector interesado debe consultar libros más avanzados.*

El ejemplo anterior nos lleva, de forma natural, a preguntar sobre la posibilidad de formar "combinaciones lineales infinitas" de soluciones. En otras palabras, ¿existe una forma infinita del principio de superposición? La respuesta es afirmativa, bajo ciertas condiciones.

Proposición 1.2.1 (Principio de Superposición.) *Sea* L *un operador diferencial parcial lineal de orden* k *cuyos coeficientes estan definidos en un abierto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$*. Suponga que* $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *es un conjunto de funciones de clase* C^k *en* Ω *satisfaciendo la EDP lineal homogénea* (1.2.5)*. Entonces, si* $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *es una sucesión de escalares tal que la serie*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

es convergente y k *veces diferenciable término a término en* Ω*,* u *satisface* (1.2.5)*.*

Dem: *Hemos enunciado la proposición en el caso general, pero la demostraremos para el caso* $k = 1$ *ó* $k = 2$*, esto es, cuando* L *es definido por* (1.2.3)*. En este caso, por hipótesis, cualesquiera que sean*

$x \in \Omega, 1 \leq i, j \leq n$,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x)$$

$$D_i u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i u_m(x)$$

$$D_i D_j u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x),$$

y esas series convergen. Por tanto, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
(Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{+\infty} a_m D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m D_j u_m(x) + c(x) \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u_m(x) + c(x) u_m(x) \right]. \\
&= \sum_{m=1}^{m} \alpha_m \left(L u_m \right)(x) = 0,
\end{aligned}$$

lo que demuestra la proposición (1.2.1) *en el caso que $k = 1$ ó $k = 2$.*

El método de separación de variables, que estudiaremos más adelante, se basa en el principio de superposición, por lo que tendremos muchas oportunidades de aplicar la proposición (1.2.1).

1.3 Condiciones de Frontera e Iniciales

Una diferencia importante entre EDOs y EDPs es la información adicional necesaria para la *unicidad de la solución*. Por ejemplo, en la solución general de una EDO lineal aparecen una o más constantes arbitrarias: podemos determinar esas constantes imponiendo condiciones iniciales, esto es, fijando los valores de la solución y de sus derivadas hasta cierto orden en un determinado punto; podemos también lograr unicidad, en el caso de intervalos finitos, imponiendo condiciones en los extremos de los intervalos, las llamadas condiciones de frontera (como en los problemas de *Sturm-Liouville*). La situación para las EDPs es fundamentalmente diferente: inclusive en el caso lineal, la solución general cuando es posible encontrarla, involucra funciones arbitrarias de las variables independientes (como vimos en el ejemplo (1.2.6)), de modo que existe un grado de generalidad mucho mayor respecto a la forma de la solución.

En el caso de las EDPs el espacio de las variables independientes es *multidimensional*: buscamos soluciones definidas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; es natural sustituir los extremos del intervalo (caso $n = 1$) por el borde $\partial\Omega$ de la región Ω. Cuando imponemos condiciones sobre el valor de la solución y de sus derivadas en el borde de la región (condiciones de frontera) tenemos un *problema de valores de frontera* o, simplemente, un problema de frontera. Las condiciones de frontera aparecen de manera natural en la descripción de fenómenos físicos estacionarios (esto es, independientes del tiempo); muchas veces encontraremos condiciones del tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.3.1}$$

donde α y β son constantes dadas, f es una función dada en $\partial\Omega$ y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada de u en la dirección normal a $\partial\Omega$.

- En el **caso** $\beta = 0$, la condición (1.3.1) se conoce como *condición de Dirichlet*.
- En el **caso** $\alpha = 0$, tenemos una *condición de Neumann*.

¿Cómo generalizar el concepto de condiciones iniciales (en el caso de EDOs) para EDPs? Como en el caso de EDPs tenemos más de una variable dependiente (por ejemplo x, t.), es natural fijar una de las variables (por ejemplo $t = 0$) e imponer el valor de la solución y de sus derivadas parciales respecto a la variable fija como función de las otras variables (por ejemplo $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = g(x)$, f y g funciones dadas). Observe que en el caso $n = 2$, con variables x, t, eso significa imponer el valor de la solución y sus derivadas normales a lo largo de la curva $t = 0$; análogamente, en el caso $n = 3$, con variables x, y, t, fijar $t = 0$ significa observar la solución (y sus derivadas normales, si fuera el caso) a lo largo de la superficie $t = 0$. Podemos entonces generalizar el concepto de *condiciones iniciales* imponiendo el valor de la solución y sus derivadas normales a lo largo de una curva (si $n = 2$) o a lo largo de una superficie (si $n = 3$). El problema correspondiente es un *problema de Cauchy* o de *valor inicial*. En problemas físicos dependientes del tiempo t, como es el caso de fenómenos de difusión y de fenómenos oscilatorios, muchas veces es conveniente separar la variable temporal t de las variables espaciales x, y, z. Lo que muchas veces ocurre es que los valores de la solución y de sus derivadas respecto del tiempo hasta el orden $k-1$ (suponiendo que la EDP es de orden k en t) se describen en el instante $t = 0$ como función de x, y, z (condición inicial) al mismo tiempo que se imponen condiciones de frontera, para todo $t \geq 0$ respecto de las variables espaciales: tales problemas se denominan *problemas mixtos*. Los conceptos precedentes quedarán más claros con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3.1

1. *El problema*

$$u_y = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$
$$u(x, p(x)) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

donde $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ son funciones dadas, es un problema de Cauchy*. Como la EDP es de primer orden, basta imponer el valor de la solución en la curva inicial $y = p(x)$ en el plano. Veremos en el próximo capítulo que dicho problema tiene una única solución clásica.*

2. *El problema*

$$u_y = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$
$$u(0, y) = f(y), y \in \mathbb{R}$$

es también un problema de Cauchy *que involucra una EDP lineal de primer orden. La curva inicial es el eje de las y. Al contrario del ejemplo anterior, el problema (1.3.1.2) no tiene solución* *(si f no es constante) o tiene infinitas soluciones (si f es constante). Veremos, en siguiente capítulo, por qué sucede esto y cuándo existe solución para el problema de Cauchy con EDPs lineales de primer orden.*

3. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado (Ω es el interior del sólido $\bar{\Omega}$). Denotemos por $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ a los puntos de $\mathbb{R}^3$ y por Δ al laplaciano en $\mathbb{R}^3$. Entonces el problema*

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 \Delta u \ \text{ en } \Omega \times (0, +\infty) \\ &u(\boldsymbol{x}, t) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ &u(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x}), \quad x \in \bar{\Omega} \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

es un problema mixto: la condición $u(\boldsymbol{x}, t) = 0$ para $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ y $t \geq 0$ es una condición de frontera, mientras que la condición $u(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$ para $\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}$ es una condición inicial. La función f es dada, α^2 es una constante positiva y buscamos una solución

$$u \in C(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)) \cap C^2(\Omega \times (0, +\infty)),$$

luego f tiene que estar en $C(\bar{\Omega})$. Observe que, para que exista solución, f debe satisfacer una condición de compatibilidad

$$f(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \tag{1.3.3}$$

En problemas mixtos, la condición de contorno y la condición inicial no son completamente independientes y entonces es preciso que se satisfaga una condición de compatibilidad para que exista solución.

El problema (1.3.2) describe físicamente la temperatura $u(\boldsymbol{x}, t)$ en el punto $\boldsymbol{x}$ y en el instante t del sólido $\bar{\Omega}$ hecho de material homogéneo, con difusividad térmica igual a α^2 y colocado en un recipiente térmico mantenido a temperatura constante igual a cero (condición de frontera) con una distribución inicial de temperatura $f(\boldsymbol{x})$ (condición inicial). No discutiremos el problema (1.3.2) pero estudiaremos en detalle el problema análogo en una dimensión espacial, esto es

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 u_{xx} \text{ en } (0, l) \times (0, +\infty), \\ &u(0, t) = 0 = u(l, t), \ \ t \geq 0, \\ &u(x, 0) = f(x), \ \ x \in [0, 1], \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

con condición de compatibilidad

$$f(0) = 0 = f(l).$$

En el lugar del sólido $\bar{\Omega}$ tenemos ahora una barra de sección recta uniforme (con área muy pequeña respecto de la longitud) y longitud l; es necesario suponer en este caso que no hay intercambio de calor con el exterior a través de la superficie lateral de la barra (los extremos corresponden al borde de Ω y están mantenidos a temperatura cero, por la condición de frontera). Si la función f satisface la condición de compatibilidad correspondiente, tanto (1.3.2) como (1.3.4) tienen una única solución clásica (esto es, continua en la región cerrada y dos veces continuamente diferenciable en el interior). Como (1.3.2), (1.3.4) es un problema mixto pero puede también ser considerado como un problema de contorno en la región no acotada $[0, l] \times [0, +\infty)$.

Ejemplo 1.3.2 *El problema para la ecuación de onda en un intervalo acotado*

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx} \ \text{en } (0,l)\times(0,+\infty),\\ &u(0,t) = 0 = u(l,t),\ \ t\geq 0,\\ &u(x,0) = f(x),\ \ x\in[0,1],\\ &u_t(x,0) = g(x),\ \ x\in[0,l], \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

también puede ser considerado como mixto (condiciones iniciales $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x), x\in[0,1]$ y condiciones de frontera $u(0,t)=0=u(l,t)$, $t\geq 0$) o como un problema de frontera en la región no acotada $[0,l]\times[0+\infty)$. Observe que, como la ecuación de onda es de segundo orden respecto de la variable temporal t, precisamos de dos condiciones iniciales. Para que exista solución es necesario que f satisfaga la condición de compatibilidad

$$f(0) = 0 = f(l). \tag{1.3.6}$$

Más tarde veremos que, si queremos soluciones $u\in C([0,l]\times[0,+\infty)\cap C^2((0,l)\times(0,\infty))$ con u_t continua en $[0,l]\times\{0\}$ necesitaremos, además de la condición (1.3.6), que $f\in C^2([0,l])$ con $f''(0)=0=f''(l)$ y que $g\in C^1([0,l])$ con $g(0)=0=g(l)$; probaremos que el problema (1.3.5) tiene de hecho una única solución en ese caso. Del punto de vista físico, el problema (1.3.5) describe una cuerda elástica de longitud l sujeta en las puntas y vibrando en un plano vertical (una cuerda de violín, por ejemplo); $u(x,t)$ es el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x en el instante t y las funciones f y g describen, respectivamente, la posición y velocidad iniciales de la cuerda. La ecuación de onda en (1.3.5) puede deducirse suponiendo que la cuerda tiene densidad de masa constante, que la amplitud es pequeña respecto de la longitud de la cuerda y que los efectos amortiguadores son despreciables. La constante c^2 es la tensión dividida entre la densidad, de modo que c tiene dimensión de velocidad: de hecho, c es la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda. La ecuacion en (1.3.5) corresponde a vibraciones libres; en el caso de vibraciones forzadas la ecuación es

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t),$$

mientras que la ecuación para vibraciones amortiguadas puede ser del tipo

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - b u_t,$$

b una constante positiva o, más generalmente,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - f\left(u_t\right).$$

La generalización del problema (1.3.5) con dos variables espaciales es

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2\Delta u \ \text{ en } \Omega\times(0,+\infty)\\ &u(x,y,t) = 0, \quad (x,y)\in\partial\Omega,\ \ t\geq 0\\ &u(x,y,0) = f(x,y), \quad (x,y)\in\bar{\Omega}\\ &u_t(x,y,0) = g(x,y), \quad (x,y)\in\bar{\Omega} \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

donde Ω es un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ y Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^2$; la condición de compatibilidad en este caso es

$$f(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \partial\Omega. \tag{1.3.8}$$

El problema (1.3.7) describe el movimiento de una membrana vibrando (como en un tambor) y también tiene una única solución si f satisface la condición de compatibilidad (1.3.8).

Ejemplo 1.3.3 *Otro problema que involucra la ecuacion de onda es*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u, x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) &= g(x), x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

donde $n = 1, 2$ ó 3 y Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^n$. El problema (1.3.9) *es un problema de Cauchy y tiene una única solución. Estudiaremos el problema* (1.3.9) *en el caso $n = 1$.*

Ejemplo 1.3.4 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto. Entonces*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \ \text{en } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= f \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

es un problema de frontera y de hecho un problema de Dirichlet. Estudiaremos ese problema para algunas regiones particulares (si Ω fuera una región rectangular o el interior de un circulo). El problema (1.3.10) *tiene una única solución.*

Ejemplo 1.3.5 *Otro problema de frontera para la ecuación de Laplace es*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \ \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \ \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

que es un problema de Neumann. Observe que (1.3.11) *no tiene solución única: si u es solución de* (1.3.11)*, entonces $u + c$ también lo es para cualquier constante c.*

Dado un problema que consiste en una EDP y condiciones de contorno y/o iniciales, existen tres preguntas fundamentales:

(i) existencia de soluciones;

(ii) unicidad de solución;

(iii) dependencia de la solución en los datos iniciales y/o de frontera.

Para estudiar la existencia es necesario especificar no solamente la clase de funciones donde buscamos solución sino también en qué sentido las condiciones de frontera y/o iniciales son satisfechas.

Consideremos, por ejemplo, el problema (1.3.1.3) con Ω el interior de la esfera de radio 1 con centro en el origen y $f \in C(\bar{\Omega})$ satisfaciendo la condición de compatibilidad (1.3.3). Si buscamos soluciones $u \in C^2(\Omega \times (0, +\infty))$ pero no necesariamente continuas en $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ ¿Cómo interpretar la condición de frontera? Podriamos, por ejemplo, buscar soluciones $u \in C^2(\Omega \times (0, +\infty))$ con la propiedad de que, para cada $t > 0$ y para cada $x_0 \in \partial\Omega$ fijos,

$$\lim_{\rho \uparrow 1} u\left(\rho x_0, t\right) = 0$$

note que en este caso estamos buscando soluciones que son radialmente continuas en las variables espaciales para cada t fijo pero no necesariamente continuas a priori en $\bar{\Omega}$. Análogamente, podriamos interpretar la condición inicial como

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = f(x)$$

para cada $x \in \bar{\Omega}$ fijo. Es claro que, del punto de vista físico, es natural buscar soluciones en $C(\bar{\Omega} \times [0, +\infty)) \cap C^2(\Omega \times (0, +\infty))$. Una vez obtenida la existencia, el significado de la unicidad es claro: deseamos saber si la solución es única dentro de la clase especificada.

El estudio de la dependencia de la solución en los datos iniciales y/o de frontera es muy importante. Debemos recordar que los datos de un problema físico son datos experimentales que necesariamente contienen errores de medición; es, por tanto, natural preguntar si pequeñas variaciones en los datos causan pequeñas variaciones en la solución: si ese fuera el caso, diremos que la solución depende continuamente de los datos iniciales y/o de frontera. Es evidente que el significado de “pequeñas variaciones” depende del problema tratado. Un problema para el cual valen la existencia, unicidad y dependencia continua de los datos iniciales y/o de frontera se llama un problema bien puesto (en el sentido de Hadamard). De lo contrario se dice que el problema es mal puesto. De los ejemplos vistos en esta sección, los únicos mal puestos son el (1.3.1.2) y el (1.3.11). En este texto estudiaremos básicamente ecuaciones lineales de primer y segundo orden con dos variables independientes. Estaremos interesados en el estudio de la existencia y unicidad de soluciones clásicas para algunos problemas (incluyendo los dos ejemplos precedentes con dos variables independientes); la dependencia en los datos iniciales es más delicada y sólo será discutida en los ejemplos más simples.

1.4 Ejercicios

Sección 1: Introducción.

1. Indique el orden de las siguientes EDPs:

   (i) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$

   (ii) $uD_1^2 D_2 u + D_1 u = u^2 + 1$

   (iii) $u_x u_t = \operatorname{sen} u$

   (iv) $x^3 \partial_x u - u^3 \partial_t u + \partial_x^2 u = x^5 + t^4$

   (v) $\dfrac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = xyu$

2. Verifique cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales indicando, en tal caso, si son homogéneas o no:

   (i) $D_1u^2 + D_2u = 0$

   (ii) $x^3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} + u = x + y$

   (iii) $(u_x)^2 - x^2 + u_t = 0$

   (iv) $u_{xx} - u_{tt} = \operatorname{sen} u$

   (v) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial y} = xyu$

   (vi) $x^2D_2^2u + y^2D_1^2u = D_1u + D_2u + xyu$

3. Identifique la parte principal de cada una de las ecuaciones de los ejercicios 1 y 2 precedentes.

4. Indique cuáles, entre las ecuaciones de los ejercicios 1 y 2 precedentes, son semilineales.

Sección 2: Linealidad y Superposición.
Pruebe directamente que si u y v son soluciones de una de las ecuaciones siguientes entonces toda combinación lineal de u y v también lo es:

1. $\frac{\partial u}{\partial x} + xu = 0$

2. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

3. $xu_y = xyu$

4. $yu_{xx} + xu_y = xyu$

5. $yu_{xx} + u_x + xu = 0$

Sección 3: Condiciones de Frontera e Iniciales.
Identifique las condiciones iniciales y/o de frontera en los problemas siguientes indicando si el problema es un problema de Cauchy, de frontera o mixto. Indique también si alguna de las funciones dadas tiene que satisfacer condiciones de compatibilidad.

1. $$\begin{aligned} &xu_x - yu_y = x^2 + y^2 \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ &u\left(t^3, t^5\right) = t^2 + 1, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &xu_x - yu_y = 0, \;\; x^2 + y^2 < 4, \\ &u(2\operatorname{sen} t, 2\cos t) = t\operatorname{sen} t, 0 \le t \le 2\pi. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} &tu_{xx} + 2xu_{xt} - tu_{tt} + x^2u_x + t^2u_t = e^x\cos t, t > 0, \\ &u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
&y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} + xyu = x + y, \quad \text{si} \quad \big(x^2/4\big) + \big(y^2/9\big) < 1,\\
&u(2\operatorname{sen} t, 3\cos t) = t(2\pi - t), t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
&t^2 u_{xx} + x u_t - u = f(x,t), t > 0, x \in (0,1)\\
&u(0,t) = \alpha(t), u(1,t) = \beta(t), t \geq 0\\
&u(x,0) = \gamma(x), x \in (0,1),
\end{aligned}
$$