CAPÍTULO 4

Ecuaciones semilineales de segundo orden

En este capítulo clasificaremos las ecuaciones semilineales de segundo orden, definiremos sus curvas características y sus formas canónicas.

4.1 Clasificación

En Geometria Analítica el estudio de las curvas definidas por ecuaciones de segundo grado en x e y se simplifica reduciendo la ecuación a su forma normal. Mediante una transformación afin que lleva las variables x e y en nuevas variables ξ, η, la ecuación puede ser escrita en la forma canónica de una parábola, hipérbola o elipse (o alguna forma degenerada de esas curvas) en términos de las nuevas variables ξ, η. El sistema $\xi\eta$ de coordenadas es el sistema de coordenadas respecto al cual la curva tiene su representación algebraica más simple y natural. En esta sección usaremos tales ideas para clasificar las EDPs semilineales de segundo orden con dos variables independientes.

Como vimos en el primer capitulo, una EDP semilineal de segundo orden con dos variables independientes es de la forma

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f\,(x, y, u, u_x, u_y) \tag{4.1.1}$$

y la parte principal de la ecuación (4.1.1) es el operador

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}. \tag{4.1.2}$$

En analogía con el caso de las cónicas, definiremos el tipo de la ecuación (4.1.1) analizando su parte principal.

Supongamos que las funciones a, b y c son continuas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y que no se anulan simultáneamente. El discriminante de la ecuación (4.1.1) es la función $\delta : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y). \tag{4.1.3}$$

Definición 4.1.1 *El operador diferencial L dado por* (4.1.2) *y la EDP* (4.1.1) *se dicen*

(i) parabólicos en el punto $(x,y) \in \Omega$ si $\delta(x,y) = 0$;

(ii) hiperbólicos en el punto $(x, y) \in \Omega$ *si* $\delta(x, y) > 0$*;*

(iii) elípticos en el punto $(x, y) \in \Omega$ *si* $\delta(x, y) < 0$.

El operador L *y la EDP* (4.1.1) *se llaman parabólicos (respectivamente hiperbólicos, elípticos) en* Ω *si son parabólicos (respectivamente hiperbólicos, elípticos) en todos los puntos de* Ω.

En general la ecuación (4.1.1) puede cambiar de tipo en el dominio de definición de sus coeficientes: en ese caso se dice que la EDP (así como el operador asociado) es de tipo mixto. Es evidente que eso no sucede cuando los coeficientes a, b y c son constantes.

De las ecuaciones que vimos en el primer capítulo, las ecuaciones de Burger y del calor son parabólicas, las ecuaciones de Sine Gordon y la de onda son hiperbólicas y las ecuaciones de Poisson y Laplace son elípticas en todo el plano. La ecuación de Tricomi,

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{4.1.4}$$

es de tipo mixto: es elíptica en el semiplano $y > 0$, parabólica en el eje de las x e hiperbólica en el semiplano $y < 0$.

Una propiedad fundamental es que el tipo de una EDP es invariante bajo cambios de variables "bien comportados". Para demostrarlo, suponga que $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ son funciones con derivadas continuas hasta el segundo orden en una vecindad del punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ con jacobiano

$$J(x, y) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

y suponga que $J(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, por continuidad, el jacobiano no se anula en una vecindad del punto (x_0, y_0) y, por el teorema de la función inversa [Fu], podemos resolver localmente $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ en una vecindad del punto $(\xi_0, \eta_0) = (\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0))$ y las funciones x e y son de clase C^2 en dicha vecindad. Definiendo entonces $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ obtenemos, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \\
u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y, \\
u_{xx} &= v_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2 v_\xi \cdot \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx}. \\
u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy}, \\
u_{yy} &= v_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2 v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Por tanto, si u es una solución clásica de la ecuación (4.1.1), v es una solución clásica de la ecuación

$$A(\xi, \eta) v_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta) v_{\xi\eta} + C(\xi, \eta) v_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta) \tag{4.1.5}$$

donde

$$\begin{aligned}
A(\vec{\xi}, \eta) &= a(x, y) (\xi_x)^2 + 2b(x, y) \xi_x \xi_y + c(x, y) (\xi_y)^2, \\
B(\xi, \eta) &= a(x, y) \xi_x \eta_x + b(x, y) \left(\xi_x \eta_y + \check{\xi}_y \eta_x\right) + c(x, y) \xi_y \eta_y. \\
C(\xi, \eta) &= a(x, y) (\eta_x)^2 + 2b(x, y) \eta_x \eta_y + c(x, y) (\eta_y)^2.
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Calculando el discriminante de la ecuación (4.1.5), obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta(\xi,\eta) &= B(\xi,\eta)^2 - A(\xi,\eta)C(\xi,\eta) = \\ &= \delta(x,y)J(x,y)^2\end{aligned}$$

donde

$$\delta(x,y) = b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y)$$

es el discriminante de la ecuación (4.1.1). Como el jacobiano nunca se anula en una vecindad del punto (x_0, y_0), el signo de $\Delta\left(\xi_0, \eta_0\right)$ es igual al signo de $\delta\left(x_0, y_0\right)$. En otras palabras, la ecuación (4.1.1) es parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) en (x_0, y_0) si solamente si la ecuación (4.1.5) es parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) en (ξ_0, η_0).

Otro aspecto de la clasificación por tipos es la existencia o no de curvas características: definimos, en el capitulo 2, características planas para ecuaciones de primer orden; para ecuaciones de segundo orden, las características son curvas planas a lo largo de las cuales la EDP puede enunciarse en una forma que contiene sólo derivadas totales de u_x y u_y. Las curvas características son muy importantes en el estudio de las ecuaciones hiperbólicas; las ecuaciones elípticas no tienen curvas características.

Para comprender lo que está sucediendo, buscaremos curvas características para la ecuación (4.1.1). Como estamos suponiendo que la ecuación es de segundo orden, los coeficientes a, b y c no se anulan simultáneamente en la región de interés; para simplificar, supongamos que a nunca se anula en la región Ω; el caso en que a se anula puede tratarse análogamente. En primer lugar, la EDP (4.1.1) es equivalente al sistema de primer orden

$$\begin{aligned}&p = u_x, \\ &q = u_y, \\ &a(x,y)p_x + 2b(x,y)p_y + c(x,y)q_y = f(x,y,u,p,q).\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Como u es de clase C^2, podemos eliminar u de las dos primeras ecuaciones en (4.1.7) derivando la primera respecto de y, la segunda respecto de x y restando, obtenemos

$$p_y - q_x = 0. \tag{4.1.8}$$

Multiplicando la ecuación (4.1.8) por una función arbitraria $\lambda = \lambda(x,y) \neq 0$ y sumando a la última ecuación del sistema (4.1.7) llegamos a la ecuación.

$$ap_x + 2bp_y + \lambda p_y - \lambda q_x + cq_y = 0 \tag{4.1.9}$$

Por otro lado, la derivada respecto de x de una función $\omega(x,y)$ a lo largo de la curva $y = y(x)$ en el plano xy es dada por

$$\frac{d}{dx}(\omega(x,y(x))) = \omega_x + \omega_y \frac{dy}{dx}. \tag{4.1.10}$$

Por tanto, enunciando (4.1.9) en la forma

$$a\frac{dP}{dx} - \lambda\frac{dQ}{dx} = 0 \tag{4.1.11}$$

donde $P(x) = p(x, y(x))$ y $Q(x) = q(x, y(x))$, obtenemos

$$p_x + p_y \frac{dy}{dx} = p_x + \frac{2b + \lambda}{a} p_y$$
$$q_x + q_y \frac{dy}{dx} = q_x - \frac{c}{\lambda} q_y$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b + \lambda}{a} = -\frac{c}{\lambda} \tag{4.1.12}$$

y λ debe satisfacer la ecuación

$$\lambda^2 + 2b\lambda + ac = 0. \tag{4.1.13}$$

Entonces, si

$$\frac{dy}{dx} = \mu(x, y), \tag{4.1.14}$$

comparando con (4.1.12) y (4.1.13), vemos que μ satisface (4.1.15)

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0. \tag{4.1.15}$$

Por tanto el signo del discriminante $\delta = b^2 - ac$ determina si existen dos, una o ninguna solución real $\mu = \mu(x, y)$ de la ecuación (4.1.15). Concluimos que en el caso hiperbólico ($\delta > 0$) existen dos familias de curvas reales satisfaciendo (4.1.14) con μ solución de (4.1.15); en el caso parabólico ($\delta = 0$) existe sólo una familia mientras que en el caso elíptico ($\delta < 0$) no existe ninguna. Las curvas definidas por (4.1.14) con μ solución de (4.1.15), cuando existen, se denominan curvas características de la ecuación (4.1.1).

Ejemplo 4.1.1 *Encontremos las curvas características para la ecuación de onda*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{4.1.16}$$

donde $c > 0$ es constante. Como observamos anteriormente, la ecuación (4.1.16) *es hiperbólica en todo el plano, por tanto tiene dos familias de curvas características. Enunciando la ecuación en la forma*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

tenemos $a(t, x) = 1, b(t, x) = 0$ y $c(t, x) = -c^2$, luego la ecuación (4.1.15) *queda*

$$\mu^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm c.$$

Obteremos entonces

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \Rightarrow x = \pm ct + k$$

donde k es una constante arbitraria. Luego las características son las familias de rectas $x + ct = k_1$ y $x - ct = k_2$, donde k_1 y k_2 son constantes.

Ejemplo 4.1.2 *Hallemos las curvas características para la ecuación de Tricomi* (4.1.4) *en el semiplano* $y < 0$*. La ecuación* (4.1.15) *en este caso es*

$$y\mu^2 + 1 = 0 \Rightarrow \mu = \pm\sqrt{-\frac{1}{y}}$$

entonces la ecuación (4.1.14) *implica*

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{1}{y}} \Rightarrow \sqrt{-y}dy = \pm dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-y)^{3/2} = \pm\frac{3}{2}x + c,$$

donde c *es una constante arbitraria. Por tanto las curvas características son*

$$y = -\left(\pm\frac{3x}{2} + c\right)^{2/3}$$

Ejemplo 4.1.3 *Encontremos ahora las curvas características para la ecuación del calor.*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{4.1.17}$$

donde $\alpha > 0$ *es constante. Como la ecuación* (4.1.17) *es parabólica en todo el plano, existe sólo una familia de curvas características: en efecto, como* $b = c = 0$*, la ecuación* (4.1.15) *tiene como una única solución* $\mu = 0$ *y por tanto las curvas características son las rectas* $y = c, c$ *una constante arbitraria.*

4.2 Formas canónicas y curvas características

Como en el caso de las cónicas de segundo grado, si la EDP (4.1.1) es del mismo tipo en un abierto en $\mathbb{R}^2$, podemos hallar un cambio de variable que la ubique en una forma particularmente simple, la llamada forma canónica o normal. La forma normal de una ecuación elíptica es

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = g\left(\xi, \eta, v_i, v_\eta\right), \tag{4.2.1}$$

la de una ecuación parabólica es

$$v_{\eta\eta} = g\left(\xi, \eta, u, v_\xi, u_\eta\right) \tag{4.2.2}$$

y una ecuación hiperbólica tiene dos formas canónicas:

$$u_{\xi\eta} = g\left(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\right) \tag{4.2.3}$$

ó

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = g\left(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\right) \tag{4.2.4}$$

El caso hiperbólico tiene más de una forma canónica porque, aunque la ecuación (4.2.3) sea normalmente más simple de resolver, la forma (4.2.4) es la que generaliza para dimensiones mayores.

Para hallar tal cambio de variables se necesita cierta suavidad de los coeficientes de la parte principal. Además, un cambio de variable es local, pues la EDP puede cambiar de tipo en la región Ω. Es evidente que si la EDP (4.1.1) es hiperbólica o elíptica en un punto (x_0, y_0), como el discriminante es continuo, la ecuación es hiperbolica o elíptica, respectivamente, en una vecindad de (x_0, y_0); mientras tanto, ello no sucede en el caso parabólico: por ejemplo, la ecuación de Tricomi es parabólica sólo en el eje de las x; por esa razón debemos suponer que la ecuación es del mismo tipo en un abierto.

Empezaremos estudiando el caso hiperbólico, que es más simple. Supongamos que los coeficientes a, b y c de la ecuación (4.1.1) tienen derivadas continuas en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ donde la ecuación es hiperbólica y que a no se anula en Ω. En este caso tenemos dos familias de curvas características y_1 e y_2 con

$$\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = \mu_1, \frac{dy_2}{dx} = \mu_2 \\ &\mu_1(x,y) = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \mu_2(x,y) = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Como la EDP es particularmente simple a lo largo de las características, es natural procurar un cambio de variable $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y)$ tal que ξ es constante a lo largo de la familia de características y_1 y es constante a lo largo de la familia y_2. Buscaremos entonces ξ, que satisfagan las ecuaciones de primer orden

$$\xi_x + \mu_1 \xi_y = 0, \xi_y \neq 0 \tag{4.2.6}$$

$$\eta_x + \mu_2 \eta_y = 0, \eta_y \neq 0 \tag{4.2.7}$$

Observe que si $a, b, c \in C^1(\Omega)$ y a nunca se anula en Ω, entonces $\mu_1, \mu_2 \in C^1(\Omega)$ y podemos hallar soluciones ξ, η de (4.2.6) y (4.2.7) de clase C^2. Además, como $\mu_1 \neq \mu_2$ en todos los puntos de Ω, la transformación $(x,y) \to (\xi, \eta)$ define de hecho un cambio de variable pues el jacobiano

$$J(x,y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = (\mu_2 - \mu_1)\, \xi_y \eta_y$$

nunca se anula en Ω. Definiendo entonces $v(\xi, \eta) = u(x,y)$ y usando las ecuaciones (4.1.5) y (4.1.6), obtenemos

$$A v_{\xi\xi} + 2B v_{\xi\eta} + C v_{\eta\eta} = F\left(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\right)$$

donde

$$\begin{aligned} A(\xi,\eta) &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = a\mu_1^2\xi_y^2 - 2b\mu_1\xi_y^2 + c\xi_y^2 = 0 \\ C(\xi,\eta) &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \end{aligned}$$

y por tanto

$$v_{\xi\eta} = g\left(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta\right)$$

Con ese cambio de variable entonces la ecuación (4.1.1) toma la forma (4.2.3).

Ejemplo 4.2.1 *Pongamos la ecuación de onda* (4.1.16) *en la forma* (4.2.3). *Las curvas características para la ecuación* (4.1.16) *son de la forma* $x \pm ct =$ *constante. Haremos entonces el cambio de variable*

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct, \\ \eta &= x - ct. \end{aligned}$$

Como $c > 0$, *el jacobiano nunca se anula pues*

$$J(t,x) = \xi_t \eta_x - \xi_x \eta_t = c + c = 2c \neq 0.$$

Tomando $v(\xi,\eta) = u(t,x)$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta} \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

por tanto la EDP (4.1.16) *queda*

$$-4c^2 v_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow v_{\xi\eta} = 0.$$

Ejemplo 4.2.2 *Pondremos la ecuación de Tricomi* (4.1.4) *en la forma* (4.2.3) *en el semiplano* $y < 0$. *Las curvas características para la ecuación de Tricomi son de la forma* $(-y)^{3/2} \pm 3x/2 =$ *constante. Haremos entonces el cambio de variable*

$$\begin{aligned} \xi &= (-y)^{3/2} + \frac{3x}{2}, \\ \eta &= (-y)^{3/2} - \frac{3x}{2}. \end{aligned}$$

Como $y < 0$, *las funciones* ξ *y* η *son infinitamente diferenciables con jacobiano*

$$J(x,y) = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = -9(-y)^{1/2}/2 \neq 0.$$

Tomando $v(\xi;\eta) = u(x,y)$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{9}{4} v_{\xi\xi} - \frac{9}{2} v_{\xi\eta} + \frac{9}{4} v_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= \frac{3}{4}(-y)^{-1/2}\left(u_\xi + v_\eta\right) - \frac{9}{4} y \left(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) \end{aligned}$$

y por tantos satisface la ecuación

$$v_{\xi,7} = -\frac{1}{12}\left(\frac{\dot{\xi} + \pi}{2}\right)^{-1/3} \left(v_\xi + v_\eta\right).$$

En el caso parabólico sólo existe una familia de curvas características pero podemos obtener como anteriormente

$$\xi_x + \mu \check{\xi}_y = 0$$

donde μ *es la única raíz de* (4.1.15). *Escogiendo cualquier función* η *de clase* C^2 *tal que*

$$J(x,y) = \check{\xi}_x \eta_y - \dot{\xi}_y \eta_x \neq 0$$

en todos los puntos de la región Ω, *obtenemos un cambio de variable que transforma la ecuación* (4.1.1) *en la ecuación* (4.2.2).

Ejemplo 4.2.3 *Pongamos en la forma canónica la ecuación*

$$x u_{xx} + 2x u_{xy} + x u_{yy} = u_x + u_y. \tag{4.2.8}$$

La EDP (4.2.8) *es parabólica en todo el plano y, como* $a = b = c = x$*, la única raiz de la ecuación* (4.1.15) *para* $x \neq 0$ *es* $\mu = 1$*, luego las curvas características son las rectas* $y = x + k, k$ *una constante arbitraria. Haciendo entonces al cambio de variable*

$$\xi = y - x$$
$$\eta = y + x$$

y tomando $v(\xi, \eta) = u(x, y), u$ *es solución de* (4.2.8) *si y solamente si* u *satisface*

$$(\eta - \xi)v_{\eta\eta} = v_\eta.$$

No estudiaremos el caso elíptico por ser más complicado. Sólo observamos que es posible repetir formalmente lo realizado en el caso hiperbólico con el auxilio de funciones complejas.